UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ALEXSANDRA LÚCIA MIRANDA LIMA SENNA DA SILVA

A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE DIVISÃO POR ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

VITÓRIA
2014

ALEXSANDRA LUCIA MIRANDA LIMA SENNA DA SILVA

A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE DIVISÃO POR ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação, na linha de pesquisa Educação e Linguagens, sublinha de Linguagem Matemática, vinculada ao campo científico de Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

VITÓRIA
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ALEXSANDRA LUCIA MIRANDA SENNA DA SILVA

A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DE DIVISÃO POR ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Educação.

Aprovada em 25 de julho de 2014.

COMISSÃO EXAMINADORA

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo

Professor Doutor Reginaldo Célio Sobrinho
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Jussara Martins Albernaz
Universidade Federal do Espírito Santo

Professora Doutora Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

PPGE - Programa de Pós-Graduação em Educação/CE/UFES - Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, Vitória-ES
Telefone: (27) 4009-2547/4009-2549 (fax) / E-mail: ppgeufes@yahoo.com.br

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial de Educação,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Silva, Alexsandra Lúcia Miranda Lima Senna da, 1972-
S586a A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental / Alexsandra Lúcia Miranda Lima Senna da Silva. – 2014.
175 f. : il.

Orientador: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.
Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Educação.

1. Aritmética. 2. Cálculo. 3. Divisão. 4. Matemática (Ensino fundamental). I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos, 1955-. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Educação. III. Título.

CDU: 37

Este trabalho é dedicado ao meu amado esposo Marcelo Senna, parceiro das minhas maiores realizações e aos nossos filhos William e Wallace, com muito amor.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, porque ele ouviu a minha voz e a minha súplica. Porque inclinou a mim os seus ouvidos; portanto, o invocarei enquanto viver. Sl. 116:1-2

À minha orientadora professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, que me ensinou que algumas vezes precisamos usar uma "lupa" para enxergarmos e valorizarmos as pequenas realizações. Pela paciência e preocupação com minhas aprendizagens, pela força nos momentos de dificuldade e fragilidade. Por acreditar em minha capacidade e me fazer ver que era possível realizar esse sonho.

Às professoras Dra. Isabel Cristina Rabelo Gomes, Dra. Jaqueline Magalhães Brum, Dra. Jussara Martins Albernaz, Dra. Katia Stocco Smole, Dra. Maria Auxiliadora Vilela Paiva, por terem aceitado tão prontamente o convite em apreciar e contribuir ajudando-nos a enriquecer este estudo.

Aos colegas da turma vinte e seis de mestrado, pela convivência harmoniosa.

Aos professores e funcionários do PPGE/UFES, pela relação de parceria e pela ajuda mútua nos momentos de aprendizagem.

Aos colegas Geraldo Broetto, Messenas Rocha, Thaís Leal, Leandra dos Santos, Daniel Moreira dos Santos e Bernadete V. S. Hoffmann, por terem colaborado com meu crescimento profissional durante as aulas com a orientadora.

Ao meu amado Marcelo Senna, o seu amor é a minha fonte de equilíbrio. Agradeço por estar sempre presente em minha vida nos momentos de alegrias e nos de necessidades, oferecendo-me seu ombro quando eu mais precisava.

Ao meu filho William, por me cercar de amor. Obrigada filho, pelos afagos em meus cabelos para aliviar minha ansiedade e pelos lanchinhos, que tão carinhosamente me oferecia, forçando-me a descansar um pouco.

Ao meu filho Wallace, tão pequeno, mas tão companheiro. Obrigada filho, pela paciência em me aguardar para começar a brincadeira.

À minha querida e amada mãe, que soube plantar em meu coração a semente de minha profissão e despertou em mim o compromisso e a arte de ensinar.

Às minhas irmãs Andréia e Andressa que, na infância, idealizaram comigo brincadeiras de escolinha. Pelas mensagens e torpedos de apoio durante o curso.

Aos meus sobrinhos pelo privilégio que me deram em ser tia de crianças felizes e encantadoras.

À minha vó Zélia que, cuidou e sempre torceu por mim.

Ao meu amigo Daniel Moreira dos Santos. A sua amizade foi um presente de Deus durante o mestrado. Que ela perdure pela vida. Agradeço por estar sempre solícito em ajudar nas dificuldades mostrando-me que era possível vencer.

À amiga Helen Castro Almeida Leite, amiga de longa data e que já faz parte de minha história há tanto tempo. Você me incentivou a conquistar essa etapa em minha vida. Obrigada por acolher meu filho Wallace em sua casa diversas vezes, facilitando meus estudos, pelas sugestões de leituras e pelos empréstimos. Sua amizade é muito preciosa para mim.

Aos queridos colegas do Grupo de Estudos GEEM-ES, Dayane, Zleinda, Lydia, Thaís, Thamires, Jaqueline, Daniel, Jéssica, Adriana, Elcio e Carla pelos momentos compartilhados de aprendizagens. Aos amigos **Cátia Palmeira, Sandra A. Fraga da Silva, Bernadete V. S. Hoffman, Lauro Sá** que me socorreram quando mais precisava.

À professora da turma pesquisada pelo carinho em nos ter acolhido, pela confiança e a generosidade em contribuir com o seu melhor nesta pesquisa.

Aos queridos alunos sujeitos da pesquisa, que festejavam todas as vezes que entrávamos na sala. Nunca esqueceremos o brilho no olhar de vocês. Sem a confiança que vocês tiveram em nos aceitar nas aulas, nada disso seria possível.

A todos os profissionais da escola "Encantos do Saber", por terem aberto as portas tornando esta pesquisa possível.

Aos alunos de todos os anos de minha vida profissional, que me ensinaram que todos têm o direito de aprender, mesmo demorando um pouco mais.

Aos familiares que participaram de perto ou de longe, especialmente meus sogros Clarição e Juracy Senna. Agradeço pelas orações, palavras de incentivo, de ânimo e de coragem.

RESUMO

Este trabalho de mestrado, com foco em educação matemática, vincula-se ao Programa de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. Nosso estudo ocorreu em 2013, em uma escola pública do município de Vitória, ES. Nossa pesquisa de cunho qualitativo investiga as estratégias e ideias de divisão dos alunos de uma 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental. Ademais, conduzimos um experimento de ensino em sala de aula com atividades que exploravam o conceito da operação de divisão. Respondemos os seguintes questionamentos: Que estratégias e ideias de divisão os alunos de uma 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem antes de um experimento de ensino formal e quais evidenciam após esse experimento? Os estudos de Gómez Chacón, Fiorentini e Lorenzato, Polya, Santos, Santos-Wagner, Selva, Serrazina e Vigotsky, dentre outros, ofereceram aportes teóricos para este trabalho. Os dados foram coletados através de aulas observadas, atividades resolvidas pelos alunos e aulas ministradas pela professora pesquisadora. Os procedimentos de análise ocorreram à luz dos autores citados. Os alunos foram estimulados a estabelecer relações, conjecturar e argumentar sobre suas conclusões durante a realização das atividades de ensino. A experiência com essas atividades contribuiu para uma mudança de atitude nos alunos, tornando-os mais reflexivos e participativos nas aulas de matemática. Além disso, acreditamos que aconteceram mudanças nas concepções de divisão e nas estratégias de ensino tanto da professora da turma pesquisada quanto da professora pesquisadora. Percebemos o desenvolvimento de autonomia dos alunos ao buscarem novas aprendizagens matemáticas e estratégias para resolver e elaborar problemas. Esperamos que este trabalho inspire outros professores a desenvolver práticas pedagógicas que priorizem a construção do conceito de divisão e a valorização das estratégias. Sonhamos também que professores sejam estimulados por esta pesquisa a considerar peculiaridades, particularidades e habilidades de todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Divisão. Cálculo. Aritmética. Matemática do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This master dissertation with focus in mathematics education took place within the Graduate Education Program at Center of Education at Federal University of Espírito Santo. Our research occurred in 2013 in a public school in the city of Vitória, ES. Our qualitative research investigates are the 3rd grade Elementary School students strategies and ideas about division. In addition, we conducted a teaching experiment in the classroom working with some activities that explored the concept of division. We answered the following questions: Which strategies and ideas about division the 3rd grade (4th year) Elementary School students show before and after a formal teaching experiment about division? The studies of Gómez Chacón, Lorenzato, Polya, Santos, Santos-Wagner, Selva, Serrazina, e Vigotsky, among others, offered theoretical contributions to this work. We collected data through lessons observed, activities solved by students and classes taught by the beginner researcher teacher. The analysis procedures occurred under the light of the cited authors. Students were encouraged to establish relationships, conjecture and argue about their conclusions throughout the educational tasks. The experience with these activities contributed to a change of students' attitudes, leading them to become more reflective and active in math classes. Furthermore, we believe that changes with respect to division's conceptions and division's teaching strategies occurred with both the classroom teacher and the beginner teacher researcher. We, also, observed the development of students' autonomy in seeking new mathematics learning situations and strategies to solve and elaborate problems. We hope this research will inspire other teachers to develop pedagogical practices that prioritizes the construction of the concepts in match and the usage of their own strategies. We dream that the teachers feel that it is important to consider peculiarities, particularities and abilities of all the ones who are mathematics and learning process.

Keywords: Division. Computation. Arithmetic. Mathematics elementary school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I
Quando tudo começou...

A arte de ser feliz

Houve um tempo em que minha janela se abria
sobre uma cidade que parecia ser feita de giz.
Perto da janela havia um pequeno jardim quase seco.
Era uma época de estiagem, de terra esfarelada,
e o jardim parecia morto.
Mas toda a manhã vinha um pobre homem com um balde,
e, em silêncio, ia atirando com a mão umas gotas de água sobre as plantas.
[...]
E eu olhava para as plantas, para o homem, para as gotas de água que caíam de seus dedos magros
e meu coração ficava completamente feliz.
Às vezes abro a janela e [...]
Avisto crianças que vão para a escola.
Pardais que pulam pelo muro.
Gatos que abrem e fecham os olhos, [...].
Ás vezes, um galo canta.
Às vezes, um avião passa.
Tudo está certo, no seu lugar, cumprindo o seu destino.
E eu me sinto completamente feliz.
Mas, quando falo dessas pequenas felicidades certas,
que estão diante de cada janela, uns dizem que essas coisas não existem,
outros que só existem diante das minhas janelas, e outros,
finalmente, que é preciso aprender a olhar, para poder vê-las assim.

Cecília Meireles[1]

Introdução

O presente estudo é composto por cinco capítulos. O capítulo 1 expõe um retrospecto da minha formação inicial e continuada, os principais motivos para a realização deste estudo, a justificativa, a problemática existente ao redor do tema e os objetivos da pesquisa. O capítulo 2 está dividido em dois momentos: o primeiro traz algumas pesquisas na literatura de educação matemática com interseção com o nosso tema de divisão. O segundo busca suporte teórico para a pesquisa tanto na literatura de educação quanto da área de educação matemática.

---

[1]Disponível em <pensador.uol.com.br › autores › Cecília Meireles>Acesso em maio.2014.

As leituras desses trabalhos tornaram possível o diálogo com diversos autores e favoreceram a compreensão do tema para o desenvolvimento desta pesquisa. O capítulo 3 contém as contribuições do estudo exploratório, a metodologia adotada para a realização da pesquisa e o experimento de ensino. Esse experimento é composto de sequência de atividades diagnósticas, sequência de atividades de ensino e os sujeitos da pesquisa. O capítulo 4 apresenta ao leitor a descrição dos dados, bem como a análise e discussão dos resultados obtidos em dois momentos. O primeiro refere-se aos dados coletados durante a sequência de atividades diagnósticas. O segundo refere-se aos resultados obtidos durante a sequência de atividades de ensino. Finalmente, no capítulo 5, registramos as conclusões de nossa pesquisa, as aprendizagens e reflexões como professora pesquisadora, as limitações e os desdobramentos do estudo.

1.1 - Retrospecto

Em 1986, iniciei[2] o ensino médio, naquele tempo chamado segundo grau. Escolhi o curso de magistério que à época, titulava os professores das séries iniciais do ensino fundamental e da educação infantil. Durante o curso, tive professores que marcaram minha vida positivamente e plantaram em mim o desejo de prosseguir na educação. Aos dezesseis anos, concluí o magistério, e minhas primeiras experiências em salas de aula vieram por meio de substituições que fazia para professores da educação básica. Em 1990, iniciei minha vida profissional numa empresa de telecomunicações no setor de telemarketing. Enquanto estava nessa empresa, surgiu a oportunidade de prestar concurso público para a prefeitura da capital. Muito incentivada pela minha avó, fiz o concurso e, em agosto de 1991, passei a integrar o quadro de professores da rede pública municipal de Vitória.

[2]Utilizamos, em algumas partes do capítulo 1, a primeira pessoa do singular para identificar as experiências pessoais da pesquisadora iniciante.

Minha primeira experiência na rede pública municipal de Vitória aconteceu em 1992 em um centro municipal de educação infantil. Durante um ano, trabalhei com crianças na faixa etária de 3-4 anos. Confiava que o curso de magistério me daria suporte para pensar em ações de trabalho com aquelas crianças. Contudo, a construção de minha identidade como professora iniciante se deu pela interação durante os horários semanais de estudo, com outras professoras mais experientes do centro de educação. Essas professoras, generosamente, me auxiliavam no planejamento das aulas com sugestões de atividades, na confecção de materiais e pela sugestão de leituras referentes à alfabetização.

Fui percebendo que ensinar crianças que estavam começando a vida escolar era possível desde que acreditasse na potencialidade de aprendizagem de cada uma delas. Guardo, com carinho, minhas lembranças do trabalho no decorrer desse período. Levo comigo o apego das crianças e a paciência das colegas, professoras experientes, com contribuições na construção de minha identidade profissional. Recordo-me dos momentos produtivos de estudos semanais com os outros profissionais da escola, das minhas caminhadas com as crianças pelo morro - local onde estava situado o centro de educação infantil -, e o cuidado que tinham comigo quando juntos saíamos pelos caminhos estreitos do morro. Lembro-me dos olhinhos brilhantes dos pequenos, ávidos pelo saber e das idas ao parque botânico, próximo do centro infantil. As crianças se encantavam com o orquidário, com a onça pintada imóvel logo na entrada. Corriam livres por entre as árvores. O parque era o espaço da comunidade para o lazer, para o descanso, o piquenique e as conversas. Essas experiências me deixaram marcas que são como tatuagens, as quais não gostaria de remover.

No final de 1991, prestei vestibular para o curso de Geografia na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Embora tenha me graduado em Geografia, permaneci como professora do ensino fundamental das séries iniciais. Em 1993, solicitei minha remoção[3] de local e horário de trabalho. Transferi-me do Centro de Educação Infantil

---

[3]Concurso de remoção é a possibilidade legal de o servidor público solicitar transferência de uma unidade de ensino para outra unidade. O concurso de remoção acontece anualmente entre os meses de novembro e dezembro.

para uma escola de ensino fundamental. Dentre os fatores que me fizeram tomar essa decisão estava o fato de que o turno de trabalho conflitava com os horários do curso de graduação. No ano de 2003, comecei o meu trabalho com as séries iniciais, alfabetizando alunos com idade de 7 e 8 anos. Sentia falta dos grupos de estudos como aqueles com os quais tive experiência durante o trabalho com a educação infantil. Preocupada em qualificar minha prática foi que, desde início de 2007, representando a escola em que trabalhava, passei a compor o grupo do Fórum de Alfabetização, coordenado pelo Núcleo de Estudos e Pesquisa em Alfabetização, Leitura e Escrita do Espírito Santo (NEPALES/UFES) voltado para estudos a respeito da cultura escrita e da leitura em diferentes tempos e lugares. Participar desse fórum despertou em mim reflexões referentes à minha formação e à prática na sala de aula.

O NEPALES promove palestras e debates de interesse dos professores alfabetizadores. E mais, nos debates que ocorrem no NEPALES, temos oportunidade de apresentar o que estamos realizando em sala de aula e de conhecer os trabalhos desenvolvidos por outros professores de alfabetização. As ações do NEPALES criam mecanismos que integram mais os professores, a fim de que socializem os planejamentos desenvolvidos com seus alunos, ajudando-os a pensar, repensar e questionar os processos de ensino-aprendizagem de leitura e escrita. A preocupação com esse processo de alfabetização me motivou a participar desse fórum na intenção de compreender as desigualdades intelectuais que afetavam a aquisição de leitura e a escrita dos meus alunos. As reflexões geradas nesses encontros possibilitaram-me ressignificar minhas ações docentes como alfabetizadora bem como compreender os modos de aprender dos meus alunos.

O ano de 2011 foi de novas aprendizagens profissionais para mim. Fui convidada a participar no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência/PIBID[4]. O programa visa a receber alunos dos cursos de licenciatura, futuros professores nas escolas da rede pública, para trabalharem com assuntos de matemática e educação matemática. Como supervisora, tive a tarefa de direcionar os alunos bolsistas às

---

[4]informações no site http://portal.mec.gov.br/.

turmas da educação básica, mediar a relação entre o professor titular de cada turma com esses bolsistas, propondo planejamentos em conjunto e a confecção de materiais pedagógicos. Foi uma experiência enriquecedora para todos os envolvidos. O trabalho com o PIBID deu-me condições de trabalhar melhor as especificidades dos alunos, principalmente alguns que careciam mais de auxílio individual. Em minha sala de aula, recebi o apoio de duas alunas do PIBID, licenciandas em pedagogia, que traziam ideias de trabalho com conteúdo de matemática.

No mesmo ano, comecei a participar do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo, GEEM-ES[5]. Este grupo tem como objetivos: i) compartilhar sucessos e angústias da prática em sala de aula de matemática e; ii) ampliar conhecimentos matemáticos e pedagógico-matemáticos na qualidade de professores que ensinam matemática. Além disso, visa a: iii) estudar e discutir textos de educação matemática, matemática e educação; iv) aprender a conduzir e registrar experimentos de ensino em sala de aula de matemática; v) aprender a se conhecer profissionalmente, por meio de um fazer pedagógico reflexivo. De acordo com Serrazina e Oliveira (2010), as discussões realizadas por professores de matemática na formação continuada são necessárias

> por criarem um ambiente propício à partilha de conhecimento sobre o pensamento matemático dos alunos e à construção de sequências de tarefas matemáticas conducentes a um ensino efectivo e, também, por permitirem a construção de um suporte social e emocional para lidar com a incerteza (p. 56).

Participar desse grupo, possibilitou-me rever conceitos matemáticos, aprender a elaborar sequências de ensino, discutir a respeito de metodologias de ensino, aprendizagem e avaliação, e a fazer reflexões individuais a respeito de minha prática em sala de aula. Com as discussões realizadas nesse grupo, aprendi a fazer registros

[5]O Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo, GEEM-ES está cadastrado no CNPq. Os membros do GEEM-ES se reúnem semanalmente desde 2006. Este grupo de estudos é coordenado pelas professoras Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner e Dra. Sandra Aparecida Fraga da Silva. O grupo é formado por professores de educação básica, ensino médio e ensino superior e por estudantes de cursos de pedagogia e licenciatura em matemática.

de minha atuação em sala de aula. Nesses registros, que se tornaram um hábito, anotava as realizações e produções dos alunos, a fim de traçar algumas estratégias para mediar situações de aprendizagem, priorizando a construção de conceitos matemáticos e estabelecendo regularidades numéricas. Aprendi a ver com outro olhar os erros dos alunos. Antes de integrar o grupo, as respostas incorretas, que os alunos elaboravam, significavam para mim ausência de aprendizagem e dificuldade intelectual. Participar das discussões e reflexões no GEEM-ES ajudou-me a analisar com cuidado essas respostas "insatisfatórias" que alguns alunos apresentavam nas atividades matemáticas.

Durante o ano de 2011, também participei da formação continuada promovida pela Secretaria Municipal de Educação. A formação sempre tinha como foco a alfabetização, a leitura e a escrita e, no final do ano, cada professor alfabetizador deveria enviar por escrito um relato de experiência vivenciada em sala de aula. O relato de experiência enviado por mim foi vivenciado nas aulas de matemática com a participação das alunas do PIBID e contemplava o conteúdo de geometria, planejado a partir de uma sequência de atividades práticas, utilização de material manipulativo e software educativo. Esse trabalho foi escolhido para ser divulgado no encerramento da formação para todos os professores alfabetizadores que fizeram parte da formação continuada em 2011.

Alguns professores apontaram nessa formação para a necessidade de relatos direcionados para a área de matemática, especificamente para os conteúdos de geometria. Oportunizar o envolvimento de professores alfabetizadores com a proposta de refletir sobre a própria prática e ouvir relatos de planejamentos, que deram certo ou não, enriqueceu a forma de cada um ensinar. No meu caso, apresentar os resultados das realizações desenvolvidas em minha sala de aula aos professores da rede municipal ajudou-me a tomar consciência de minhas aprendizagens. Contribuíram também para que eu compartilhasse com os mesmos (i) metodologias de ensino, (ii) necessidades que sentimos em sala de aula, (iii) angústias e (iv) desafios.

1.2 – Motivação e Justificativa

Três eixos foram centrais para delimitar o foco deste estudo. O primeiro foi a necessidade e o desejo que tive em aprofundar meus conhecimentos em educação matemática, especificamente, nas operações aritméticas fundamentais. O trabalho com as operações aritméticas era planejado por mim para ser ensinado – parte no primeiro semestre de cada ano letivo e parte no segundo semestre. Ao iniciar o processo de ensino, sabia que era um dos conhecimentos mais complexos das aulas de matemática porque sentia que os alunos demoravam a aprender o algoritmo formal dessas operações.

Destaco também que minha compreensão de multiplicação e divisão era diferente da que possuo agora ao final da pesquisa. No caso de divisão, eu abordava apenas a ideia de repartir em partes iguais e me preocupava com o ensino do algoritmo sem considerar as estratégias criadas pelos alunos para resolução dos problemas. O meu planejamento tinha como principal objetivo que o aluno dominasse a técnica da operação. Para isso, aplicava listas de arme e efetue, tarefas de memorizar a tabuada e problemas visando apenas à conta e ao resultado. O que está de acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), ao afirmarem que "durante muito tempo foi tarefa da escola elementar o ensino da aritmética. Saber aritmética correspondia saber as tabuadas e saber fazer as contas" (p. 40). Nesse sentido, antes eu identificava as competências elementares de cálculo dos alunos, especialmente, a habilidade em efetuar os algoritmos, como a necessidade fundamental para a aprendizagem matemática no ensino fundamental I.

O segundo eixo, que delimitou este estudo, envolve as minhas reflexões, a respeito dos resultados insatisfatórios obtidos por alguns alunos. Essa questão me estimulou a buscar discussões com meus pares e a fazer algumas leituras sobre o ensino de matemática. Por isso, passei a participar com mais frequência dos encontros do fórum/NEPALES e do grupo de estudos GEEM-ES. Constatei que nesses espaços, nós, professores, temos oportunidade de refletir, discutir e conhecer o trabalho que nossos colegas desenvolvem em sala de aula. Nesses encontros, com outros professores, percebemos que algumas angústias são semelhantes.

Nos momentos de prática de sala de aula vinham à mente vários pensamentos e questionamentos acerca do processo de ensino-aprendizagem. Dentre eles, destaco as especificidades dos alunos e suas individualidades, e a constante busca em aprender a ensinar com mais qualidade. Não me contentava em ensinar o conteúdo mínimo que exigia apenas as habilidades de ler, escrever e contar. Questionava-me a respeito: a) do meu desempenho como profissional da educação; b) do conteúdo necessário e possível; c) das maneiras de ensinar; d) da elaboração de atividades que fizessem sentido, e) do livro didático e sua adequação aos alunos, ou seja, se dariam conta em utilizá-lo; e f) de como poderia compreender as soluções dos meus alunos e seus respectivos acertos e erros.

Nos grupos de discussões dos fóruns promovidos pela Universidade Federal do Espírito Santo e nos de formação continuada dos professores organizados pela Secretaria Municipal de Educação, as queixas eram parecidas, e a busca por resultados satisfatórios dos alunos era uma das metas em comum. Foi na relação com outros professores que desenvolvi várias aprendizagens. Por exemplo, aprendi que existem diferentes possibilidades para explorar e trabalhar conceitos matemáticos, interagir com os alunos, e planejar as ações de avaliações, utilizando diferentes instrumentos que possibilitassem verificar se ocorreu ou não a aprendizagem (SANTOS, 1997). Planejar mecanismos diferentes de avaliação propiciam que o professor obtenha fotos variadas de seus alunos, evidenciando etapas do processo de aprendizagem e questione seus processos de ensino. Por isso, um professor deve pensar e articular o ensinar, o aprender e o avaliar, pois de fato temos um processo interligado de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática. (SANTOS, 1997).

O terceiro eixo delimitou, definitivamente o foco da pesquisa. No período de estudo exploratório, fui convidada pela professora Alice[6] para introduzir o conteúdo de divisão em uma turma da 4ª série/5º ano[7] de alunos defasados em idade-série. Depois, nos momentos de observação para a pesquisa definitiva em 2013 com uma turma de 3ª

[6]Nome fictício atribuído à professora titular da turma da 4ª série/5º ano, durante o estudo exploratório realizado no final do 2º semestre de 2012.

[7]Em 06 de fevereiro de 2006, a Lei nº11. 274 alterou de séries escolares para anos escolares e instituiu o ensino fundamental de nove anos de duração com a inclusão das crianças de seis anos de idade. (Ver http://www.mec.gov.br/ensino) Acesso em 17/02/2014.

série/4º ano, a professora titular solicitou que iniciássemos o trabalho com divisão. Isso nos levou a perceber que falar de divisão é algo necessário entre os profissionais de educação que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, mas não têm licenciatura em matemática. As duas professoras nos relataram que precisavam experienciar outras maneiras de trabalhar com a divisão. Disseram também que esta pesquisa, diálogos e reflexões constantes entre a pesquisadora iniciante e a orientadora contribuiriam para as aprendizagens delas e dos alunos. O fato é que todos os envolvidos na pesquisa aprenderam, incluindo a professora pesquisadora iniciante, a professora orientadora, as professoras das turmas, alunos e pedagogas. Esses três momentos: o desejo de aprofundar meus conhecimentos em matemática e educação matemática; minhas reflexões a respeito dos resultados insatisfatórios dos alunos; e o estudo exploratório desenvolvido no início da pesquisa constituíram o disparador para que este estudo tivesse como foco a operação de divisão.

Sabemos que existem discussões, tanto em nível nacional como internacional, a respeito da complexidade inerente ao ensino-aprendizagem de divisão com números naturais. Ao comentarem sobre essa complexidade, Lautert & Spinillo (1999) argumentam que o estudo sobre divisão abrange procedimentos para operar com a subtração e a multiplicação. Além disso, Lautert & Spinillo (1999) acrescentam que é preciso levar em consideração que a operação de divisão tem por objetivo encontrar um resultado que pode ser uma divisão exata ou não, ou ainda resultar em fração. Sendo assim, o resultado de uma divisão não resulta apenas em números inteiros. A professora Kátia Smole, durante o período da qualificação deste estudo, em abril de 2013, comentou em seu parecer que a divisão é um dos temas mais investigado nos meios acadêmicos. As discussões giram em torno do ensino dessa operação, do momento certo em que deve ser ensinada, da construção do conceito de divisão, da exploração das duas ideias – de repartir em partes iguais e de medida, do resto da divisão, e das relações entre os termos (dividendo, divisor, quociente e resto).

Efetivamente, em nossa experiência de 23 anos de magistério, constatamos que ensinar a divisão é a operação que os alunos mais demoram a aprender. Quando vamos trabalhar esse conteúdo, alguns de nós, professores, planejamos o ensino formal[8] após os alunos terem aprendido a operação de multiplicação. Isso acontece porque, normalmente, trabalhamos as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão separadamente e de forma linear. Deixamos de evidenciar para os alunos que adição e subtração são operações inversas e que compõem o campo conceitual aditivo. Também não destacamos que a multiplicação e divisão são operações inversas e compõem o campo conceitual multiplicativo.

Nunes e Bryant (1997) observaram que "uma visão comum da multiplicação e da divisão é de que são simplesmente operações aritméticas diferentes que deveriam ser ensinadas às crianças após terem aprendido adição e subtração" (p. 141). Uma das razões para que essa prática seja comum se deve ao fato, segundo os autores, de que a multiplicação é mais difícil do que a adição. Tal ideia, de acordo com Nunes e Bryant (1997), está correta. Eles ainda apontam outra razão do ensino das operações acontecer primeiro com a adição e a subtração, a ideia de que "a adição conduz à multiplicação porque alguns aspectos da adição formam a base da multiplicação" (p. 142). O que existe ao apresentarmos situações matemáticas em que é possível obtermos o resultado final ao somarmos parcelas iguais ou ao multiplicarmos o tamanho das partes pelo multiplicador, porque chegaremos ao mesmo resultado. Nunes e Bryant (1997) indicam que entre a divisão e a subtração acontece algo semelhante. Os autores exemplificam com uma situação de "270 dividido por 90 vendo quantas vezes você deve subtrair 90 de 270 para chegar a zero" (p. 142). Os autores concluem que não devemos limitar tanto a "operação de multiplicação como apenas outra forma da adição, ou a divisão como outra forma de subtração" (p. 142).

Outra questão que queremos apresentar é a nossa prática de sala de aula, ao trabalharmos, enfocando a operação de divisão. Quando vamos ensinar essa operação, levamos para a sala de aula material manipulativo (tampinhas, palitos, figurinhas, etc.), acreditando ser um recurso eficiente na aprendizagem da operação. As crianças vão observando e participando das ações realizadas, envolvendo a

[8]Define-se por ensino formal aquele praticado pelas instituições de ensino, com respaldo de conteúdo, forma, certificação ou profissionais de ensino. O ensino formal é aquele que ocorre na sala de aula nos sistemas de ensino tradicionais. (http://www.mec.gov.br/ensino) Acesso em 17/02/2014.

operação de divisão. Contudo, antes que consolidemos o conceito de divisão envolvendo as duas ideias básicas - repartir em partes iguais e contar quantas vezes uma quota cabe -, é comum passarmos para o próximo passo: o ensino do algoritmo. Talvez essa prática seja comum porque muitos de nós, professores, cremos que, se nossos alunos aprenderem a efetuar corretamente os algoritmos das operações fundamentais, eles aprenderão qualquer conteúdo matemático. Todavia, quando planejamos atividades com resolução de situações-problema, notamos que alguns alunos têm grande dificuldade em estabelecer conexões entre o algoritmo efetuado e a pergunta do problema, ou seja, o que se deseja descobrir no problema. Correa e Spinillo (2004) alertam que limitar a aritmética ao ensino do algoritmo

> reduz a matemática a calculo ou execução de algoritmos, ignorando que a matemática fornece modelos para a representação e compreensão do mundo em que vivemos. Em segundo lugar [...] porque o algoritmo se refere a um conjunto de procedimentos que leva à execução de uma dada operação, enquanto a operação implica em transformações realizadas sobre números, quantidades, grandezas e medidas (p.105).

Corroborando com a citação acima, reconhecemos que ensinar e explorar os diferentes caminhos de solução numa situação de divisão pode contribuir para a compreensão das relações desta operação com as demais operações, o que permite ao aluno desenvolver estratégias mais flexíveis de cálculo. Na aula de matemática, há “quatro tipos de aprendizagem”, segundo comentam Huete e Bravo (2006, p. 119): “memorização, aprendizagem algorítmica, resolução de problemas e aprendizagem de conceitos”. Assim, o professor precisa assegurar que o ensino de matemática na sala de aula incentive os alunos a “buscarem diferentes formas de resolver problemas” (SMOLE, 2001), e que o professor as considere como “válidas e importantes etapas do desenvolvimento do pensamento” (SMOLE, 2001, p. 122). As crianças têm capacidade de criar ao se sentirem protagonistas do processo. Lamentavelmente, o ensino da matemática se resume em algumas salas de aula a esquemas de execução do algoritmo. Aprender esquemas faz parte, mas, essas representações precisam fazer sentido para os alunos no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Foi participando como formadora do primeiro encontro do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa/PNAIC, em março de 2014, que identificamos, pelas falas de alguns professores, a crença deles de que aprender matemática é resolver os algoritmos convencionais das operações aritméticas fundamentais. Verificamos que tal crença é muito parecida com a que descrevemos como nossa, no início desse texto, hoje tão distante de nossa prática. Ao apresentarmos nesse encontro do PNAIC um recorte sobre a nossa pesquisa de mestrado, constatamos que, de modo geral, os professores de educação básica têm necessidade de aprender melhor as ideias da operação de divisão com números naturais. Exemplificamos essa observação por meia de falas de alguns participantes:

> Professor A: "*Precisamos falar mais de matemática nas formações".*
>
> *Professor B: "A gente deixa pra ensinar divisão quando tá perto de terminar o ano".*
>
> *Professor C: "É meio complicado ensinar outros jeitos de resolver. Vai confundir a cabeça dos meninos".*

É possível refletirmos, fundamentados nas falas desses professores, que existe a necessidade de estudar mais sobre a aritmética nas formações continuadas de professores dos anos iniciais e desconstruir algumas impressões enraizadas equivocadamente. Ensinar a divisão apenas de um jeito torna-se menos complexo para alguns professores. Conseguimos refletir a respeito disso ao analisar a fala do Professor "C" que comentou que ensinar a divisão para ele, em diferentes abordagens, é complicada e dificulta a aprendizagem dos alunos. É possível que esse sentimento decorra do receio de o professor ter que ensinar algo para seus alunos que ele nem conhece. Ouvimos comentários de alguns professores de que a outra ideia de dividir como quantos cabe é equivalente à ideia de repartir em partes iguais. Mesmo apresentando situações-problema, envolvendo as duas ideias de divisão e procurando mostrar as diferenças entre as duas, nem todos concordavam. Muitos professores insistiam no encontro de que era tudo a mesma coisa e que só havia uma ideia de dividir e que o resultado dá sempre o mesmo. Um número bem reduzido de professores pareceu aceitar ou acreditar ou compreender que existem duas ideias distintas associadas com o conceito de dividir.

> *Professor D: "Nunca pensei que tivesse diferença".*

Referindo-se às duas ideias de divisão, o Professor "D" relata que nunca tinha constatado essa diferença entre as duas ideias de divisão. Provavelmente, foi a primeira vez que ele ouviu a respeito dessa diferença nesse encontro do PNAIC. Ao apresentarmos as duas ideias básicas da operação de divisão, que envolve a ideia de repartir em partes iguais e a ideia de medida (ou de quantos cabe, ou de quantas vezes uma dada medida cabe dentro de outra) retiramos o equilíbrio intelectual de vários professores. Criamos um conflito cognitivo para os professores (SANTOS, 1997).

Alguns questionamentos surgiram para nós ao refletirmos sobre as falas desses quatro professores e de outros que não registramos nesse texto: i) Quantos professores que não se manifestaram, tiveram dúvidas quanto às duas ideias da divisão? ii) Como é que professores, que não têm clareza sobre as ideias matemáticas a respeito de dividir, vão ensinar divisão para os seus alunos? iii) Se eles não têm compreensão dessas ideias, o que ensinam e como planejam suas aulas? Não temos precisamente a intenção de responder a esses questionamentos, porém, deixamos aqui uma reflexão que merece ser abordada em momentos de formação de professores, tais como grupos de estudo, cursos de pedagogia, espaços escolares e encontros de formação continuada.

Foi tendo como pano de fundo essa trajetória de questionamentos, experiências e reflexões que definimos a questão conclusiva de investigação como: **Que estratégias e ideias de divisão, os alunos de uma turma de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem antes de um experimento de ensino formal, e quais evidenciam após esse experimento?**

1.3 - Objetivo Geral

Analisar[9] as estratégias de alunos ao resolverem situações-problema que envolvam a operação de divisão antes e após um experimento de ensino sobre o tema.

[9] Compreendemos que, para analisar os dados coletados, foi necessário identificar, caracterizar e compreender as estratégias apresentadas pelos alunos.

1.4 – Relações entre objetivos, questionamentos e coleta de dados

Apresentamos, organizados no quadro abaixo, o tripé que abarca a pergunta central, objetivos e instrumentos de coleta de dados utilizados no desenvolvimento da pesquisa. Observar esta inter-relação entre nosso questionamento, os diferentes objetivos e os procedimentos de coleta de dados nos permitiram perceber que nossa pesquisa estava estruturada adequadamente e que poderíamos obter respostas.

Quadro 1: Relações entre objetivos, questionamentos e coleta de dados

Objetivo Geral	Questionamento Central	Procedimentos para coleta de dados
Analisar estratégias de alunos ao resolver situações-problema que envolvem a operação de divisão antes de um experimento de ensino sobre o tema.	Que estratégias e ideias de divisão os alunos de uma turma de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem antes de um experimento de ensino formal?	Fase diagnóstica: i) A realização de uma sequência de atividades diagnósticas de resolução de problemas de distribuir em partes iguais e de quantos cabe. ii) A elaboração de problemas, envolvendo as duas ideias de divisão. iii) Observação das estratégias dos alunos durante as atividades diagnósticas para resolver e para elaborar problemas. iv) Conversa informal com os alunos sujeitos da pesquisa a respeito de suas respostas e das estratégias utilizadas.
Analisar estratégias e aprendizagens de alunos ao resolver situações-problema que envolvem a operação de divisão após um experimento de ensino sobre o tema.	Que estratégias e ideias de divisão os alunos de uma turma de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem após esse experimento?	Experimento de ensino: i) A realização de uma sequência de atividades de ensino explorando caminhos alternativos de resolução de situações-problema que envolvam as duas ideias de divisão. ii) Conversa informal com os alunos sujeitos da pesquisa. iii) Sequência de atividades explorando as relações matemáticas existentes entre as operações de adição, subtração e multiplicação com a operação de divisão. Atividades para conhecer o algoritmo de divisão por subtrações sucessivas.

CAPÍTULO II
Revisão de Literatura e Pressupostos Teóricos

"Asunto difícil es la división" (dura cosa es la partida).
Aforismo italiano

Introdução

Neste capítulo, apresentamos o levantamento de algumas pesquisas, artigos, livros e documentos oficiais que versam sobre divisão. O eixo central de nossa pesquisa está ancorado nos estudos de Lev Semiyonovitch Vygotsky, no que tange à apropriação de conceitos e dos processos de interação, seja por meio das comunicações praticadas entre professor/aluno seja aluno/aluno. Trazemos também as contribuições de Richard Skemp referentes às concepções de compreensão instrumental e relacional. Fazemos um breve histórico das operações de multiplicação e divisão, das ideias e estratégias alternativas de aprendizagem de divisão.

Ao fazermos uma busca concernente às pesquisas com interseção ao nosso tema divisão, encontramos algumas listadas na dissertação de mestrado de Martinez (2012) de 1997 a 2009. Acrescentamos mais sete pesquisas de 2006 a 2012 sobre o referido conteúdo nos anos iniciais do ensino fundamental. Registramos abaixo a relação desses trabalhos. Todavia, utilizamos em nossa revisão bibliográfica, apenas as quatro pesquisas de mestrado destacadas no quadro 2. Os trabalhos escolhidos resumem o tipo de produção na área e focalizam o tema de divisão que tem interseção com o nosso estudo. Fizemos uma leitura de trabalhos de mestrado e incluímos um de doutorado por acharmos que ia fornecer informações para os nossos estudos.

Quadro 2: Algumas pesquisas realizadas sobre Divisão entre 1997 a 2012

Ano	Pesquisa	Título	Autor/Autora	Orientador (es) Orientadora (s)	Instituição
1997	Mestrado Ensino de Matemática	O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª a 4ª série)	Silvia Swain Canoas	Sandra Magina; Pinto Magina	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2000	Mestrado Psicologia Cognitiva	A representação de operações e problemas de divisão em criança: da linguagem oral para outras formas de representação	Síntria Labres Lautert	Alina Galvão Spinillo; Jorge Tarcísio de Rocha Falcão	Universidade Federal de Pernambuco
2002	Doutorado em Educação	O conhecimento matemático escolar: operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental	Vanderlei Rodrigues Gregolim	Regina Maria Simões Puccinelli Tancredi	Universidade Federal de São Carlos
2004	Mestrado em Educação	Um estudo sobre a influência de um método diferenciado na solução de problemas de divisão	Maria Sara Abdalla Martins	Miriam Cardoso Utsumi	Centro Universitário Moura Lacerda/Ribeirão Preto
2006	Mestrado em Educação	Produção discursiva na aula de matemática: uma interpretação sociointeracionista	Eleonora Dantas Brum	Jackeline Rodrigues Mendes	Universidade São Francisco
2006	Mestrado em Educação	Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª séries de classes multisseriadas	Andrea Wallauer	Beatriz Vargas Dorneles	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
2007	Mestrado em Educação	O ensino desenvolvimental e a aprendizagem de matemática na primeira fase do ensino fundamental	Fernanda Chaves C. Soares	Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas	Pontifícia Universidade Católica de Goiás
2008	Mestrado em Educação	As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros dos alunos do	Edileni Garcia Juventino de Campos	Leny Rodrigues Martins Teixeira	Universidade Católica Dom Bosco do Mato Grosso do Sul

		ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores			
2008	Mestrado em Educação	A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª série	Luciana Cardoso Benvenutti	Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro	Universidade do Vale do Itajaí/SC
2008	Mestrado em Ciências Naturais e Matemática	As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos	Maria da Conceição Alves Bezerra	Rogéria Gaudencio do Rêgo	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
2009	Mestrado em Psicologia	Habilidades metacognitivas em matemática: desenvolvimento por meio de problemas aritméticos verbais com história no ambiente lúdico de aprendizagem de realidade suplementar	Roselaine Cristina Pupin	Antônio dos Santos Andrade	Universidade de São Paulo/Ribeirão Preto
2010	Mestrado em Educação Matemática	Um estudo das estruturas multiplicativas nos Guias de Planejamento e Orientações Didáticas do programa Ler e Escrever	Sandra Regina Firmino da Silva	Tânia Maria Mendonça Campos; Marlene Alves Dias	Universidade Bandeirante de São Paulo
2012	Mestrado em Ciências e Matemática	Campo multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do ensino fundamental em escolas públicas de Maceió	Rosemeire Roberta de Lima	Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos	Universidade Federal de Alagoas

2.1 – Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª séries de classes multisseriadas

Em sua dissertação, Wallauer (2006) procurou investigar quais conhecimentos sobre a operação de divisão, as crianças trouxeram para a escola, antes de entrarem em contato com o algoritmo convencional. O objetivo principal de sua pesquisa foi analisar as estratégias que as crianças utilizavam ao solucionar problemas que incluem a divisão, a fim de contribuir para o desenvolvimento e aprimoramento do ensino dessa operação, trazendo esclarecimentos quanto ao processo epistemológico. O estudo teve como objetivo específico analisar as estratégias de construção da operação de divisão em crianças de seis, sete e oito anos, no campo conceitual das estruturas multiplicativas, a fim de definir o papel do registro notacional no desenvolvimento das estratégias empregadas pelas crianças. Os sujeitos dessa pesquisa foram alunos de 1ª e 2ª séries, inseridos em classes multisseriadas da rede municipal rural do Rio Grande do Sul.

Wallauer (2006) dividiu os sujeitos de sua pesquisa em dois grupos. O grupo 1 não utilizou, sistematicamente, o registro espontâneo. O grupo 2 usou o registro espontâneo e participou de cinco sessões (de, aproximadamente, 1 hora) nas quais aconteceram atividades de resolução de problemas com a interferência da pesquisadora. Ela definiu como registro espontâneo as representações gráficas que a criança aplica para resolver divisões na realização de situações-problema de partição e medida sem situações de ensino desenvolvidas pela pesquisadora. A pesquisadora fez uma entrevista individual aberta, buscando responder questões relativas ao conceito de divisão que elas traziam para a escola. Em seguida, os alunos resolveram, oralmente e com auxílio de materiais concretos, situações-problema que implicavam o conceito de divisão. Após essa etapa da pesquisa, foi aplicada uma intervenção pedagógica apenas ao grupo 2, distribuída em cinco atividades. Os dados coletados foram gravados em fita de áudio, e registros foram feitos no diário de bordo da pesquisadora, além dos já feitos pelos alunos.

Podemos considerar que Wallauer (2006) concluiu que o grupo de alunos - que utilizou estratégias inventadas, antes ou ao mesmo tempo em que os algoritmos convencionais foram apresentados -, demonstrou mais compreensão do que o grupo de alunos que começou usando apenas os algoritmos. A pesquisadora enfatiza em sua conclusão que "ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre as variáveis envolvidas, preocupando-se apenas com o registro automático, quando poderiam estar desenvolvendo a habilidade que envolve estimativa, distribuição, proporção" (WALLAUER, 2006, p. 196). Ela ainda mostrou o quanto as intervenções didáticas exercem um papel primordial na construção do conhecimento. As intervenções didáticas levaram os alunos a fazer registros notacionais significativos e não apenas o registro do algoritmo, garantindo a gênese da operação de divisão. Por meio da intervenção didática, puderam-se conhecer quais fatores afetavam a compreensão da operação de divisão. Dessa forma, o professor teve condições de mediar, com mais eficiência, a aprendizagem do conceito de divisão.

Sabe-se que o ensino de matemática no ensino fundamental ainda está muito relacionado ao ensino de técnicas algorítmicas. A valorização do algoritmo se dá porque alguns professores acreditam que, as etapas de resolução, a rapidez e a economia sejam os principais objetivos que devem ser alcançados nessa área do conhecimento. Assim, na sala de aula, não se tem a prática de incentivar que as crianças construam estratégias próprias de resolução e apresentem seu esquema mental, seu raciocínio, com notações que tenham significado para elas. Entendemos que aprender a sequência de etapas na resolução do algoritmo é importante porquanto permite organizar o raciocínio, a fim de chegar ao resultado exato. Mas, ter apenas esse conhecimento leva a criança a utilizar, somente, um método de resolução de modo automático sem significado para ela.

2.2 – As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros dos alunos do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores

O estudo de Campos (2008) buscou descrever e analisar os erros produzidos por alunos das 4ª, 5ª e 7ª séries na aprendizagem da divisão, procurando compreender as dificuldades envolvidas nesse processo e sua relação com o ensino praticado pelos professores. A pesquisa foi desenvolvida dentro da abordagem qualitativa e organizada em aulas expositivas, em exercícios e no uso do livro didático. Dois eixos nortearam o estudo: a) as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de divisão; b) as concepções dos professores sobre o ensino e aprendizagem desse conceito. Teve como objetivos específicos: i) identificar os obstáculos epistemológicos e didáticos, envolvidos na aprendizagem de conceitos de divisão em alunos das 4ª, 5ª e 7ª séries do ensino fundamental; ii) descrever e analisar os erros produzidos pelos alunos das 4ª, 5ª e 7ª séries ao operar com divisão com números naturais; iii) identificar e analisar a metodologia aplicada para o ensino da divisão, conforme relatado pelo professor; iv) verificar o domínio e a compreensão que o professor tem sobre a natureza do conteúdo e do seu ensino.

Como instrumentos de coleta de dados, a pesquisadora utilizou a observação, a entrevista e o questionário. As entrevistas foram aplicadas de duas maneiras – entrevistas clínicas para os alunos e entrevistas semiestruturadas para os professores. A pesquisa consistiu de duas etapas. Na primeira, os alunos foram entrevistados individualmente, por meio de uma prova composta de oito questões. As questões eram organizadas da seguinte forma: situações-problema a serem resolvidas pelos alunos, fazendo uso das duas ideias de divisão – a de repartir em partes iguais e medida. A atividade de elaboração de problemas também foi acrescentada às atividades de coleta de dados. A entrevista teve como objetivos identificar: a) as estratégias de resolução; b) o significado do quociente e do resto; c) as estratégias para a verificação dos problemas; e d) a resolução alternativa para os problemas.

Na sequência, foram apresentadas aos alunos três sentenças matemáticas com o objetivo de que elaborassem uma situação-problema para cada sentença. A primeira sentença matemática foi 10.980 ÷ 36; a segunda foi 123 ÷ 4 = 30 e resto 3. A terceira sentença matemática solicitava que o aluno elaborasse um problema em forma de história, usando a divisão em que a solução fosse 16. Na análise dos problemas com a ideia de quotas, a pesquisadora aponta que os alunos não tiveram dificuldades em relação à identificação da estratégia adequada. Quanto ao desempenho por série, foi observado que, nas turmas de 4ª e 5ª série, os alunos recorreram a estratégias inadequadas, sendo que o mesmo não aconteceu com os alunos da sétima série. Os alunos da 7ª série reconheceram a divisão como a operação indicada para resolver o problema e indicaram os procedimentos adequados. Em relação ao problema de quotas com o resto, a dificuldade foi a de considerá-lo como fazendo parte do todo que foi dividido. A maioria dos alunos expôs, nesse problema, o resultado obtido no quociente, desconsiderando o resto como parte da resposta.

Campos (2008) revelou, ao final de seu estudo, que as crianças demonstraram muitas dificuldades na aprendizagem do conceito de divisão, pois este abrange divisões sucessivas, multiplicações, subtrações, o tamanho do todo, o número de partes. Entender essa operação implica compreender os invariantes operatórios que regem o conceito de divisão. Outro fator que, possivelmente, contribuiu para a dificuldade na divisão, segundo Campos (2008) está relacionado às suas diferentes formas de representações, como por exemplo: (20÷4); (20:4); ($\frac{20}{4}$); $\left(20 \,\big|\underline{\;4\;} \right)$ (Veja LAUTERT & SPINILLO, 1999, p. 24 desse texto). Segundo Campos (2008), essas reproduções revelam uma transformação de representação dentro de um mesmo registro, ou seja, com um mesmo significado operatório. A autora informou que, de acordo com Duval (2003)[10], elas podem gerar dificuldades para os alunos, quando não forem trabalhadas no contexto escolar. A autora discorre sobre a preocupação que diversos pesquisadores vêm tentando desvendar como ocorre o desenvolvimento e a aprendizagem de conceitos matemáticos. A discussão sobre livro didático, abordada na pesquisa, refere-se ao tipo de recurso didático que o professor explora na sala de aula. A pesquisa apontou que todos os professores utilizaram o livro como recurso exclusivo no processo de ensino da divisão, porém não foi relatado quais foram os livros.

Em síntese, em seu estudo, Campos (2008) considera que foi possível perceber que as dificuldades dos alunos na aprendizagem da divisão dependeram, de três fatores centrais: da complexidade que domina este conceito matemático, da falta de domínio do professor no conteúdo e do tratamento dispensado ao ensino do mesmo em sala de aula. Nós acrescentamos à argumentação de Campos a ausência de sentido que, muitas vezes, a operação de divisão tem para os alunos.

---

[10]DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D: A. (org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica, p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2003.

2.3 – A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª série

A pesquisa de Benvenutti (2008) se fundamentou na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1991; 1996)[11]. Objetivou caracterizar as estratégias de resolução escritas produzidas por alunos da 5ª série para a solução de problemas de divisão, abrangendo partição e medida. Para coleta de dados aplicou dois problemas de partição e dois de medida com resto e sem resto. Analisou e categorizou os registros produzidos pelos alunos. Segundo Benvenutti (2008), os alunos não se restringiram à utilização do algoritmo de divisão. Esperava-se que eles empregassem apenas o algoritmo de divisão, levando-se em consideração o grau de escolaridade. Contudo, observou-se que os alunos também usaram desenhos e outras formas não convencionais na solução dos problemas. Os erros dos alunos também foram analisados na pesquisa e constatou-se que os mais comuns tinham relação com a tabuada, seguidos da execução do algoritmo. Concluiu-se que os alunos utilizaram como estratégia o algoritmo de divisão e poucos erraram a solução.

2.4 – Campo multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do ensino fundamental em escolas públicas de Maceió

Lima (2012), em sua pesquisa qualitativa na modalidade de estudo de caso, analisou as estratégias de resolução de problemas de divisão – ideia partitiva e ideia quotitiva – de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental de três escolas maceioenses. Tinha como objetivos específicos: i) verificar se os alunos reconhecem a divisão como operação indicada para a resolução de problemas; ii) identificar quais estratégias de solução predominaram na resolução de problemas de divisão que envolveram as ideias de partição e de medida; iii) investigar se as soluções apresentaram procedimentos coerentes com o enunciado do problema; iv) refletir acerca das antecipações que foram explicitadas pelos alunos e se seus conhecimentos

---

[11] VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Org.). **Didática das matemáticas.** Lisboa: Horizontes pedagógicos, 1996. p. 155-191.
VERGNAUD, G. **El nino, lãs matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Traducción: Luiz Ortega Segura. Trillas: México, 1991.

matemáticos demonstraram relações, significados e especificidades do campo multiplicativo.

Para coleta de dados, a pesquisadora aplicou duas atividades diagnósticas, objetivando mapear o perfil da turma no que se refere ao seu conhecimento sobre o campo multiplicativo. Contudo, devido ao volume de dados, ela não considerou esses dados para sua análise. O instrumento de coleta de dados para análise definitiva consistiu de uma atividade, envolvendo quatro problemas com quantidades discretas – quando uma quantidade para dividir é enumerável e divisão de resto zero. Foram aplicados três problemas de divisão com ideia de medida e um com a ideia de repartir em partes iguais. Os problemas de medida tiveram predominância nos estudos de Lima. A autora se baseou nos resultados dos trabalhos de Cunha (1997) e Benvenutti (2008), que apontaram ser o conceito de medida pouco desenvolvido nos anos iniciais de escolarização, e os professores e alunos demonstraram dificuldades em diferenciar ideias de partição e de medida.

Em sua investigação, Lima (2012) fez um levantamento por turma com objetivo de identificar as soluções do tipo convencional (uso do algoritmo) e não convencional (formas diferentes dos algoritmos da operação elementar) sem levar em consideração os acertos e erros. Além da análise qualitativa dos problemas aplicados, a pesquisadora apresenta uma análise quantitativa das estratégias dos alunos por escola. Entre os 105 alunos participantes de sua pesquisa, 48% utilizaram o algoritmo da divisão, e 22%, a ilustração. Lima declara que a aplicação do algoritmo convencional foi valorizada pelos alunos como procedimento padrão para resolver problemas de divisão. A autora enfatizou que, nos casos em que a estratégia do algoritmo convencional foi empregada, muitos alunos não registraram a resposta aos questionamentos apresentados no enunciado nem justificaram como conseguiram resolver. Tendo como questão central "quais estratégias de solução os alunos utilizaram em problemas de divisão nas ideias de partição e medida", os dados revelaram que esses alunos dos anos iniciais apontaram diferentes procedimentos para uma mesma situação numérica.

A pesquisa de Wallauer (2006) trouxe esclarecimentos a respeito do registro notacional. Concordamos com Wallauer ao afirmar que tanto a técnica quanto o conceito são necessários na resolução de problemas e um complementa o outro na aprendizagem da operação de divisão. A pesquisa de Benvenutti (2008) nos trouxe elementos que auxiliaram na categorização das estratégias elaboradas pelos alunos em nossa investigação. Os trabalhos de Lima (2012) e Campos (2008) nos ajudaram a delinear a metodologia apresentada em nossa pesquisa. Em nosso estudo de mestrado, planejamos atividades diagnósticas, envolvendo as duas ideias de divisão explorando as estratégias não convencionais criadas pelos alunos. Depois, exploramos em nosso experimento de ensino caminhos alternativos na resolução da divisão e do algoritmo por subtrações sucessivas. A investigação de Campos (2008) apontou algumas dificuldades dos alunos na operação de divisão e a relação dessas dificuldades com o ensino. Esse estudo de Campos (2008) ajudou-nos ao analisar as dificuldades de nossos alunos de 4ª série/5º ano.

2.5 - A formação de conceitos na aprendizagem matemática

Sabemos que crianças desenvolvem cálculos de multiplicação e divisão em diversas situações do dia a dia. São situações corriqueiras em que é necessário dividir objetos ou brinquedos ou guloseimas com alguém. Em suma, a matemática de um modo geral, está presente na vida das pessoas em brincadeiras, relações de compra e venda, nos afazeres domésticos e em atividades escolares. Lidamos diariamente com números, raciocínio lógico, com as operações, pensamento combinatório, etc. As crianças necessitam agir em diversas situações em que é preciso juntar, separar, tirar, comparar, agrupar, dividir, distribuir. E por isso, destacamos a importância de compreender os conceitos matemáticos por detrás dessas ações que se relacionam entre si, para que essas habilidades sejam trabalhadas e aprimoradas.

De acordo com Pais (2006), “conceitos são idéias gerais e abstratas, associadas a certas classes de objetos, criados e transformados nos limites do território de uma área de conhecimento disciplinar” (p. 121). O autor acrescenta que “a conceitualização é muito mais demorada que a aprendizagem ou a memorização de uma definição” (p. 122). Compreendemos que um conceito está associado com ideia, noção, entendimento e concepção referente a um objeto. Para Caraça (1989/1958, p.125), “os conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interesse capital, prático ou teórico para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes”. Davis e Oliveira (2010) postulam que os conceitos são “construídos tanto a partir da experiência individual da criança como a partir dos conhecimentos transmitidos na interação social, em especial na escola” (p. 97).

Para compreendermos essas relações matemáticas, o trabalho pedagógico na sala de aula precisa estar pautado na compreensão dos diferentes significados associados aos conceitos matemáticos. A abordagem desses conhecimentos é fundamental para desenvolver nos alunos pensamento matemático, habilidades matemáticas, bem como criticidade e autonomia no contexto da vida estudantil e social. Nessa abordagem, Skemp (1976) estabelece que a raiz de uma das grandes dificuldades na matemática, atualmente, está na compreensão. Para o autor existem dois tipos de compreensão que podem ocorrer durante o processo de aprendizagem: a compreensão instrumental/procedimental ou a compreensão relacional/conceitual. Segundo Skemp (1976), na compreensão instrumental/procedimental, o aluno domina uma coleção isolada de regras e algoritmos aprendidos por meio da repetição e memorização, sem reflexão e, provavelmente, sem entendimento completo do assunto, não estabelecendo relações entre conceitos. Somos de parecer que Onuchic e Allevato (2005) concordam com Skemp (1976) e acrescentam que os conhecimentos referentes às regras e aos algoritmos são usados para “executar tarefas rotineiras e poucas relações cognitivas são necessárias para se ter o conhecimento de um procedimento” (p. 220).

O texto de Skemp (1976, p. 2) traz exemplos matemáticos com situações em que alunos usam procedimentos sem nenhuma reflexão, baseados no automatismo do tipo "empréstimo" em subtração ou “inverter a fração e multiplicar” para obter a divisão de uma fração ou "muda o sinal quando se leva a expressão para o outro lado”. Ademais, o autor afirma que executar regras, algoritmos e operações são necessários, mas alerta que o importante deve ser a compreensão do que se faz no processo inicial de aprendizagem. Skemp (1976) ainda acrescenta que apenas esses procedimentos operatórios não são suficientes para que o aluno construa uma aprendizagem significativa.

No outro tipo de compreensão, denominado por Skemp (1976) como relacional/conceitual, o que se pretende é saber tanto o que fazer, como fazer e por que fazer. O autor assevera que é através da interação professor/aluno, aluno/aluno e aluno/tarefa que se dá a construção do conhecimento. Essa interferência do outro, que, segundo Vygotsky (1998/1984), pode se apresentar por meio de objetos - dentre eles o livro didático -, ou do professor ou do colega e a valorização dos conhecimentos informais[12] do aluno pode contribuir com que a compreensão conceitual seja eficiente e consolidada. Por isso, compreendemos que o aluno ao se aproximar da compreensão relacional, amplia a sua capacidade de resolver atividades com criatividade e inteligência. Onuchic e Allevato (2005) corroboram com as ideias de Skemp (1976) e afirmam que

> quanto mais condições se dêem aos alunos para pensar e testar uma idéia emergente, maior é a chance de essa idéia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de idéias e de compreensão relacional” (p. 220).

Para Santos (1997), a aprendizagem acontece na sala de aula, quando o aluno resolve as atividades de diferentes maneiras, seja com material manipulativo, seja abstraindo ao elaborar esquemas mentais, de modo a significar suas soluções em diversos contextos do cotidiano ou escolar.

Santos-Wagner (2012, 2013) enfatiza que alguns professores ministram aula de forma instrumental, explicam de maneira instrumental e depois exigem que o aluno aplique a compreensão do conceito de forma relacional em atividades avaliativas. Essa prática já era apontada por Skemp (1976) como desencontros de compreensão dentro da aprendizagem e dos procedimentos de ensino do professor e que atrapalham a aprendizagem dos alunos. O autor afirma que uma das divergências no ensino de matemática se dá no momento em que o aluno espera por um ensino instrumental baseado em procedimentos de cálculos, e o professor deseja que o aluno desenvolva conceitos relacionalmente. Alguns alunos, simplesmente, ignoram as bases que podem oferecer uma preparação para as aprendizagens posteriores. Tudo o que alguns alunos querem, segundo Skemp (1976, p. 4), é “algum tipo de regra para obter a resposta”. O autor esclarece ainda que, nesse caso, será difícil convencer o aluno que o conhecimento instrumental não é suficiente, principalmente se ele consegue

---

[12]Para definição de conhecimento informal utilizaremos Moreira e Oliveira (2003, p. 40) que definem conhecimento informal “não só as habilidades e conhecimentos que as crianças adquiriram fora da escola, como também os conceitos que desenvolvem na escola sem serem ensinados”.

resolver todos os problemas propostos. O procedimento necessário à tarefa apenas exigirá do aluno recorrer à sua memória. Comumente, vemos em nossa experiência que alguns alunos diante de um problema que não compreendem, resolvem escolher por tentativa e erro qual operação aplicar. Jesus (2005) aponta que ‘‘se os procedimentos são aprendidos como peças soltas de informação sem conexão com o conhecimento conceptual, os alunos têm maior dificuldade de relembrá-los e transpor para outros contextos’’ (p. 93).

A outra divergência de compreensão, referida por Skemp (1976), ocorre quando alunos que ao esperarem pelo ensino relacional, recebem o instrumental. Desejam compreender os conceitos, acham “chato” memorizar regras, porém, o professor assume uma postura mecanicista ao ensinar e avaliar. Em relação a essas colocações do autor, principalmente em relação à visão do professor sobre o aparente sucesso alcançado por seus alunos, é possível que exista também outro tipo de entrave matemático. Por exemplo, no caso de um professor que planeja seu ensino numa abordagem relacional, contudo, em suas avaliações emprega uma perspectiva instrumental, ou vice-versa.

Skemp (1976) faz uma reflexão referente às possíveis vantagens que muitos professores sentem ao decidirem ensinar matemática de forma instrumental. Segundo ele, a matemática instrumental, geralmente, é mais fácil de entender, menos complexa e mais rápida para chegar à solução. Além disso, para alguns tópicos matemáticos torna-se complicado estabelecer um entendimento relacional. Assim, é conveniente e agradável tanto para o aluno quanto para o professor ter várias questões com respostas corretas.

Assim sendo, é interessante sugerir que o professor busque investigar e compreender como os alunos agem diante das atividades matemáticas propostas, e que estratégias eles utilizam para resolver. Aprender a compreender o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos pode favorecer nas decisões pedagógicas de ensino que precisam ser feitas pelo professor, influenciando em seu planejamento. Essas escolhas, certamente, refletirão na atuação do professor em sala de aula e na aprendizagem dos alunos. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, p. 41), “quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido". Também sugerimos que o professor reflita a respeito de seus procedimentos de ensino e avalição. Ou seja, o professor deve estar consciente de que propicia aulas que favoreçam uma compreensão instrumental ou relacional.

De acordo com o documento dos PCN (BRASIL, 1997, p. 76), a importância do estudo do cálculo se deve ao fato de ser uma "atividade básica na formação do indivíduo possibilitando o exercício de capacidades mentais envolvendo memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização". Desse modo, permite ao aluno a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade e a desigualdade, como também propicia o desenvolvimento de conceitos e habilidades fundamentais para aprofundar os conhecimentos matemáticos. A abordagem do cálculo favorece o desenvolvimento da criatividade, da capacidade para tomar decisões e de atitudes de segurança, para resolver problemas numéricos cotidianos. Santos (1997) reforça essa abordagem, salientando que "o mundo exigirá que os indivíduos sejam alfabetizados matematicamente" (p. 4). A autora esclarece que estar alfabetizado, matematicamente, engloba as capacidades de

> comunicar-se matematicamente, resolver problemas, utilizar várias estratégias, argumentar, formular hipóteses, testá-las e encontrar soluções; apreciar a matemática; buscar informações sobre assuntos matemáticos estudados ou não; e sentir-se informados sobre a matemática e confiantes em explorar situações rotineiras e não-rotineiras (SANTOS, 1997, p. 4-5).

Entendemos que Jesus (2005, p. 91) concorda com Santos (1997) ao ressaltar que "pensar autonomamente, interpretar uma situação nova, demonstrar persistência na resolução de um problema, trabalhar em equipe, interagir com os outros, são algumas competências fundamentais" para a aprendizagem matemática. Verificamos que nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o aluno geralmente é avaliado pelo professor não por sua compreensão, mas pela repetição da técnica eficaz que consegue executar nas atividades matemáticas. A respeito das aprendizagens relacional e instrumental, Ausubel[13] (1968, citado em MOREIRA, 1982), em seus estudos sobre desenvolvimento intelectual humano, considera que a assimilação de conceitos se dá por meio de uma aprendizagem significativa pela qual "uma nova informação se

---

[13] AUSUBEL, D. P. **Educational psychology:** A cognitive view. Nova York, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1968.

relaciona com um aspecto relevante preexistente na estrutura cognitiva de quem aprende" (p. 7). A estrutura cognitiva a que se refere o autor é ‘‘uma estrutura hierárquica de conceitos que são abstrações da experiência do indivíduo’’ (MOREIRA, 1982, p. 8). Em contraponto com a aprendizagem significativa, Ausubel tece críticas à "aprendizagem mecânica", isto é, uma "aprendizagem com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva" (MOREIRA, 1982, p. 9). Para Ausubel, a assimilação de conceitos acontece ao se relacionar o conceito com ideias relevantes já estabelecidas na estrutura cognitiva do sujeito. Realmente, aquilo que nos impressiona, ou que sentimos passa, constantemente, por um processo dinâmico denominado por aquisição de conceitos. E o conjunto desses conceitos que, ativamente, é elaborado e reelaborado, nos permite enxergar o mundo, nos situar nele e fazermos escolhas de como resolver as situações que nos envolvemos.

2.5.1 - Relação entre a Aprendizagem e o Desenvolvimento

Segundo Muniz (2007, p. 32), o processo de aprendizagem sugere a "existência de um contexto sociocultural que é [...] o quadro de referência de validação" do conhecimento produzido, porque é esse contexto que dá sentido à aprendizagem. Vygotsky (citado por LA TAILLE; OLIVEIRA; DANTAS, 1992) mostra esse fato ao apresentar sua teoria da apropriação de conceitos pelo sujeito que afirma não podermos conceber a construção de conceitos fora da relação sujeito e contexto sociocultural. É no âmbito social que um conceito toma sentido e forma. Logo, as funções psicológicas ocorrem em duas dimensões no desenvolvimento do sujeito: inicialmente, como atividade coletiva e mediada e, posteriormente, como atividade individual. Tentar compreender a apropriação do conhecimento pelo sujeito numa dimensão, como no caso da construção de conceitos, implica necessariamente dar conta do processo na outra dimensão, pois ambas se implicam mútua e estritamente.

Dentre as ideias relacionadas, diretamente, com a prática pedagógica, Vygotsky se dedica aos estudos sobre a aprendizagem e o desenvolvimento (OLIVEIRA, 1997), a formação de conceitos e cria o conceito de zona de desenvolvimento proximal. La Taille, Oliveira e Dantas (1992, p. 27) concluem que o processo de internalização consiste no indivíduo internalizar formas, culturalmente, presentes do comportamento social, “num processo em que atividades externas, funções interpessoais, transformam-se em atividades internas, intrapsicológicas”. Dessa forma, o processo de internalização é determinado pela estimulação ambiental, atuando no desenvolvimento do funcionamento psicológico do indivíduo.

Vygotsky (1998/1984) explora as relações entre desenvolvimento e aprendizagem e elabora o conceito de zona de desenvolvimento proximal no âmbito da psicologia histórico-cultural relacionada ao campo da educação. O autor valoriza a ação pedagógica, o papel da escola e a intervenção do professor na formação do sujeito. Ele é conhecido como um autor sócio-interacionista, porquanto leva em consideração elementos que se formam no interior do sujeito, e outros que são gerados do ambiente, da interação com o meio. A aprendizagem, segundo Vygotsky (1998/1984) “utiliza os resultados do desenvolvimento em vez de se adiantar ao seu curso e de mudar a sua direção” (p. 104). O desenvolvimento está para a aprendizagem como a sombra para o objeto que a projeta. O “desenvolvimento e a aprendizagem sobrepõem-se constantemente, como duas figuras geométricas perfeitamente iguais” (Vygotsky, 1998/1984, p. 105).

Com efeito, Vygotsky (1998/1984) explora as relações interpessoais na produção de conhecimento, isto é, as relações e diálogos que ocorrem entre as pessoas. Ele atribui serem o aprendizado e o desenvolvimento enraizados na cultura que acontecem, historicamente, pela inter-relação entre indivíduos, uso de instrumentos, estimulação do meio e pela internalização das ações. Para uma aprendizagem significativa é fundamental propor redes colaborativas dentro da escola que possibilitem a aprendizagem de todo e qualquer aluno. Ter experiências de aprendizagem dos outros em sua própria experiência é essencial na definição do desenvolvimento do sujeito. Trabalhar com a perspectiva de desenvolver toda a potencialidade do aluno é essencial para uma aprendizagem mais ampla e completa.

Portanto, desenvolvimento e aprendizagem, na concepção de Vygotsky (1993), são dois fenômenos distintos, mas interdependentes, cada um tornando possível o outro. Os dois processos interagem dialeticamente e possibilitam a conversão de um no outro, pois, a aprendizagem promove o desenvolvimento e este anuncia novas possibilidades de aprendizagem. Apesar de o aprendizado estar diretamente relacionado ao desenvolvimento da criança, “os dois nunca são realizados em igual medida ou em paralelo” (Vygotsky, 1993, p. 95).

2.5.2 – Mediação

Para compreender as concepções de Vygotsky (1998/1984), não podemos deixar de falar a respeito da ideia central que constitui o desenvolvimento humano como processo sócio-histórico que é a mediação. A internalização seria a reconstrução interna de uma operação externa que permite o pensamento abstrato flexível, sendo mediada pelo uso de instrumentos e signos. Importante ressaltar que signos são indicadores de caráter social e cultural. Portanto, a fim de internalizar os signos, o sujeito precisa captar os significados já aceitos socialmente. É a interação que faz com que o sujeito domine o ambiente na e pela linguagem. A invenção e o uso dos signos como meio para auxiliar a solucionar um problema psicológico do tipo lembrar, relatar é equivalente à invenção do uso de instrumentos no campo psicológico. A relação do sujeito com o mundo ao seu redor não é uma relação direta, mas mediada através de instrumentos ou de signos. Ou seja, é pela mediação que se dá a internalização de atividades e comportamentos. Os signos (VYGOTSKY, 1998/1984) são formas posteriores de mediação de natureza semiótica (simbólica) que fazem uma interposição entre o sujeito e o objeto de uma forma que não é concreta. É de natureza simbólica.

O uso dos signos, construídos culturalmente, conduz o sujeito a uma estrutura específica de comportamento que se destaca do desenvolvimento biológico e cria novas formas de processos psicológicos enraizados na cultura. É fundamental conhecer o nível de desenvolvimento da criança que se quer ensinar. Vygotsky (1998/1984) postula que as capacidades intelectuais da criança entre o que já foi concretizado e as suas possibilidades de aprender é que irão se consolidar no desenvolvimento real. É uma relação mediada por alguém experiente no ambiente sociocultural do sujeito aprendente. Assim, dentro da perspectiva vygotskyana, construir conhecimentos implica numa ação partilhada, já que é através do outro que as relações entre sujeito e objeto do conhecimento são estabelecidas. O autor coloca que, no processo de desenvolvimento, há pelo menos dois níveis de desenvolvimento, e é a partir desse pressuposto que ele apresenta o conceito de zona de desenvolvimento proximal.

2.5.3 - Zona de desenvolvimento proximal

Vygotsky (1998/1984) postula que a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é

> a distância entre o nível real de desenvolvimento, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou em colaboração com outro companheiro mais capaz (Vygotsky, 1998/1984, p. 112).

De acordo com Vygotsky (1998/1984), a zona de desenvolvimento proximal está relacionada aos conceitos espontâneos transformados em conhecimentos científicos. A ZDP está associada à imitação, ao pensamento, à linguagem, às relações interpessoais e ao desenvolvimento moral. Vygotsky esclarece que a ZDP envolve as relações entre o nível de desenvolvimento real, ou seja, até aonde a criança já alcançou – o olhar retrospectivo, referente às funções psicológicas que a criança já construiu (MOYSÉS, 2009); e o nível de desenvolvimento potencial – o que a criança ainda não tem, mas que está próximo de acontecer.

Quando a criança não soluciona sozinha uma tarefa e o faz com auxílio de outra pessoa ou de uma ferramenta, identificamos que ela está num plano de desenvolvimento próximo de se consolidar. De acordo com Vygotsky (1998/1984), a ZDP é onde está ocorrendo o desenvolvimento. Ele assevera que entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, existem funções que ainda não estão maduras, entretanto, estão em processo de maturação, ou seja, em estado embrionário. Vygotsky explicita que há uma relação dinâmica entre aprendizagem e desenvolvimento, bem como a importância da interação social para a conquista pela criança de um desempenho autônomo. Vygotsky postula que

> a aprendizagem desperta uma série de processos evolutivos internos capazes de operar apenas quando a criança está em interação com as pessoas de seu meio e em cooperação com algum semelhante. Uma vez que esses processos tenham se internalizado, tornam-se parte das conquistas evolutivas independentes da criança (Vygotsky, 1998/1984. p. 138).

Nesse ponto é possível a intervenção, pois as funções psíquicas superiores estão em processo de maturação. Aquilo que a criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã. Assim, o desenvolvimento é estimulado pelo aprendizado. Por outro lado, sem a presença de outros indivíduos não é possível a aprendizagem, porque o conhecimento passa, necessariamente, pela mediação do outro. Conclui Vygotsky (1998/1984) que “o caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa através de outra pessoa” (p. 102). Importante ressaltar que não podemos afirmar que todas as crianças experimentam um mesmo processo de aprendizagem, ainda que possam apresentar semelhanças em seu desenvolvimento. Mesmo que as condições e oportunidades que se colocam para cada criança sejam as mesmas, cada ambiente social oferece seus instrumentos de pensamento e, portanto, aprendizagens sociais diferentes são promovidas.

2.6 - As ideias básicas da divisão

Neste trabalho, consideramos duas ideias de divisão: partição e medida. Na perspectiva euclidiana, a divisão é conceituada como uma ação que requer dividir um número por outro em partes iguais de maneira que o resto seja menor que o divisor ou igual a zero (TELES, 2007)[14] citado por (LIMA, 2012). A divisão no domínio dos números naturais é expressa pela equação “a = q x b + r”, onde r é menor que b (SANTOS & REZENDE, 1996; TOLEDO & TOLEDO, 1997; SANTOS, 1997; CARRAHER,1998). Assim, qualquer número natural a pode ser expresso como um múltiplo de qualquer outro número natural b, sendo b ≠ 0. Desse modo, a definição científica formal de divisão é dada como a distribuição de um dividendo por um divisor, de onde resultará um quociente, que acarretará numa parte restante ou não. A partir desse algoritmo, como salienta Caraça (1989/1958, p. 22), estabelece-se uma relação fundamental, em que, num caminho inverso, obtemos: “Dividendo= divisor x quociente

[14] TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **Imbricações entre os campos conceituais na matemática**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

+ resto". As operações de multiplicação e divisão segundo Carvalho e Gonçalves (2003)

> revestem-se de uma grande complexidade a nível cognitivo, quando são encaradas em termos de modelação de situações e não apenas do ponto de vista do cálculo dado que envolvem novos significados para os números e novos tipos de relações entre eles que devem ser exploradas (p. 24).

A essência do ensino de divisão bem como de multiplicação durante muito tempo foi a de "decorar" a tabuada e trabalhar direto com os algoritmos (PONTE; SERRAZINA, 2000). Às vezes, pensamos que a tabuada é algo do ensino tradicional. Todavia, o que é tradicional é o jeito de ensinar a tabuada de modo mecânico, no qual os fatos fundamentais não são construídos com compreensão. Pires (2012) corrobora com esse argumento ao dizer que

> Nas décadas de 1950 e 1960, o ensino da multiplicação e da divisão centrava-se no "decorar" resultados. As tabuadas de multiplicação e de divisão eram muito importantes e os professores passavam grande tempo fazendo com que os alunos decorassem esses resultados, sem a necessária compreensão. Muitas vezes, usavam métodos voltados à memorização e alguns deles, ainda hoje, estão na lembrança de muitas pessoas, que sofreram diferentes castigos pelo fato de não conseguirem decorar as tabuadas (p. 130).

É importante observarmos que, em décadas passadas, a aprendizagem de resolução de problemas de multiplicação e divisão só era explorada com as crianças depois que soubessem, com fluência, "recitar de cor" a tabuada. Dialogando com outros professores no ambiente de trabalho, notamos que essa concepção ainda perdura em nossos dias. É notório que o ensino de matemática continua, no século XXI, associado ao domínio de competências dos algoritmos das quatro operações. Acrescentamos ainda, a ideia de que a tabuada deve ser apresentada aos alunos para que saibam efetuar as operações com rapidez e eficiência. Ser competente na operação de divisão vai além de saber fazer apenas o algoritmo e decorar a tabuada. Por isso, o professor precisa pensar em estratégias de ensino variadas, prazerosas e apropriadas para que os alunos de hoje aprendam os fatos numéricos das tabuadas como algo que os auxilie a abstrair e a operar com números. Jesus (2005) ressalta que a relevância do estudo da divisão está registrada em vários documentos (APM, 1988;

DEB, 2001; DGEBS, 1990; NCTM, 1991)[15], "os quais sublinham a necessidade da compreensão e apropriação progressiva do conceito" (p. 92). Segundo a autora,

> compreender uma operação é saber utilizá-la adequadamente em situações do mundo real, é ter a percepção das suas propriedades, perceber as relações existentes entre as mesmas e ter um entendimento intuitivo dos efeitos de uma operação num par de números (p. 93).

Convém lembrarmos que importa priorizar, neste trabalho com a tabuada, a construção das relações matemáticas entre as operações. Em outras palavras, fazer associações e descobertas e pensar diversas formas de chegarmos a um mesmo resultado. A função do professor, dentre outras, é de ser um provocador, como um incentivador e motivador no processo de aprendizagem (ERNEST, 1988). A partir de nossa experiência em sala de aula notamos que ao ensinar a divisão priorizando decorar, sistematicamente, o passo a passo do algoritmo por meio de atividades de arme e efetue ou por meio de problemas, sentimos que os alunos revelam dificuldades em identificar qual operação deve ser efetuada. Nesse caso, é comum o aluno ficar desestimulado e não resolver a tarefa.

Na operação de dividir está implícita a ideia de repartir, equitativamente, os elementos de um conjunto. As situações que envolvem divisão contêm duas ideias diferentes: repartir em partes iguais e de medida. Por exemplo, se precisamos distribuir 30 figurinhas entre três crianças (nós temos duas grandezas de tipos diferentes: figurinhas/crianças) e precisamos determinar quantas figurinhas por criança. Essa situação-problema é chamada de divisão por partição ou partitiva ou equitativa ou como partilha (TOLEDO & TOLEDO, 1997; FERREIRA, 2005; JESUS, 2005), porque conhecemos o número total de elementos - 30 figurinhas – que deverão ser distribuídos em um número de partes iguais para as 3 crianças, devendo ser calculado o tamanho de cada parte (10 figurinhas). Havemos de considerar, nesta situação, três elementos; por exemplo, 30 figurinhas (o todo) e 3 crianças para receber (3 partes) e

---

[15]APM (Associação de Professores de Matemática de Portugal). **Renovação do Currículo de Matemática.** Lisboa: APM, 1988; DEB (Diretrizes do Ensino Básico). Currículo Nacional do Ensino Básico: **Competências Essenciais.** Lisboa: DEB, Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 2001; DGEBS. **Organização Curricular e programas – 1º ciclo**. Lisboa: Ministério da Educação, DGEBS (Direção Geral do Ensino Básico e Secundário de Portugal), 1990; NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.** Lisboa: APM e IIE, 1991.

10 figurinhas por criança (o tamanho das partes). Portanto, a criança precisa lidar com estas três variáveis: o número total de figurinhas, o número de crianças e o número de figurinhas por criança. De acordo com Ferreira (2005), é necessário que o aluno compreenda as relações que se mantém constante entre o dividendo (30 figurinhas) e o divisor: haverá mais figurinhas (quociente) por criança quanto menor for o divisor. Se mantemos constante o número de figurinhas (30) e aumentamos o número de crianças, haverá menos figurinhas por criança.

Por outro lado, se nós temos 30 figurinhas e queremos distribuir 5 figurinhas para cada criança (mesma grandeza: figurinhas), temos outra situação real. Nesse caso é preciso determinar o número de crianças que irão receber as figurinhas. Essa divisão é uma outra situação que é chamada de medida ou quantos cabe ou quotativa (TOLEDO & TOLEDO, 1997; FERREIRA, 2005; JESUS, 2005). Aqui temos o todo conhecido - 30 figurinhas - dividido em subconjuntos, previamente estabelecidos - 5 figurinhas - devendo calcularmos quantas vezes esse subconjunto está contido no todo - quotas. A quota indica que seis crianças receberão 5 figurinhas cada uma, ou seja, cada criança recebe a mesma quota, a mesma quantidade. O vocábulo *quota* (cota) tem significado no dicionário, mas a palavra quotativa não, sendo então uma palavra da linguagem matemática.

A operação de divisão é de grande complexidade a nível cognitivo, ao ser relacionada a situações em que precisamos representar com material manipulativo e, não apenas do ponto de vista, estritamente, do cálculo. Essa operação exige o uso de outras operações, tais como adição, subtração e multiplicação. Porém, crianças antes mesmo de aprender a ler ou escrever ou até mesmo antes de ingressarem na escola são capazes de elaborar estratégias próprias de cálculo baseadas na compreensão do conceito de dividir em situações simples do dia a dia. Alguns estudiosos (FISCHBEIN, DERI e MARINO[16], 1985 apud SELVA, 1998) enfatizam que o professor deve iniciar, propondo problemas de partição – onde o tamanho das partes deve ser encontrado - porque envolve a ação de repartir elementos em partes iguais. Maldaner

---

[16]FISCHBEIN, E.; DERI, M.; MARINO, M. “The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division”, **Journal for Research in Mathematics Education** 16, 1985, pp. 3-17.

(2011) comenta em seu texto que existem autores que não apoiam essa ideia (DICKSON; BROWN; GIBSON, 1984[17]), afirmando que problemas de medida – em que deve ser calculado o número de partes em que o todo foi dividido sabendo-se a medida ou a quota a ser retirada de cada vez do todo - podem ser compreendidos mais facilmente pelas crianças. Concluímos que ainda necessitamos ter mais estudos que investiguem como crianças compreendem o conceito de divisão, a partir dessas duas ideias.

2.6.1 - Estratégias de divisão não convencionais

Numa situação de divisão na qual ainda não foi apresentado pelo professor o algoritmo ou nenhum outro meio de cálculo, é possível que a criança faça uma abordagem, inventando estratégias, partindo de experiências já vividas com desenhos ou utilizando a modelagem com materiais manipuláveis. A situação é modelada pela criança com base no que ela própria já sabe. A aprendizagem, portanto, embora inicie como uma assimilação espontânea, não tem seu início, apenas, quando a criança ingressa na escola, mas ao iniciar seu processo de escolarização ainda na educação infantil. É importante que a criança verbalize, crie estratégias por tentativa e erro e se expresse explicando o seu processo de pensamento.

Encontrar outros meios de cálculo é um processo progressivo que faz parte da aprendizagem da criança. Jesus (2005) esclarece essa ação da criança em escolher uma estratégia[18] de modelação, salientando que esse tipo de abordagem é "substituído por estratégias de cálculo de adição e subtração e, mais tarde pela multiplicação e divisão" (p. 96). É fundamental que a criança possa explorar suas

---

[17]DICKSON, L.; BROWN, M. e GIBSON, O. **Children learning mathematics**. Londres: Cassel for the Schools Council, 1984.

[18]Usaremos a definição de Pontes e Serrazina (2000) ao nos referirmos à estratégia como sendo uma abordagem para solucionar questões, podendo umas serem mais vantajosas do que outras.

próprias estratégias de resolução com liberdade e possa confrontar as suas soluções com as dos colegas. A criança precisa vivenciar uma variedade de situações de divisão antes da apresentação do algoritmo e precisa verbalizar o que fez, como pensou e, além disso, a professora ou o professor deve dialogar com os alunos a respeito de seus raciocínios, estratégias e hipóteses. De acordo com Jesus (2005) "criar e explorar os seus próprios processos de resolver problemas prepara os alunos para uma aprendizagem significativa dos algoritmos estandardizados" (p. 97). Porém, a autora alerta que

> tanto a matemática não escolar como a escolar baseada essencialmente em símbolos, são ambas limitadas porque somente exploram sistemas individuais de representações e consequentemente o conhecimento torna-se também limitado (JESUS; 2005, p. 98)

Sendo assim, inserimos no planejamento de ensino atividades que explorem uma diversidade de estratégias e possibilidades de resolução, sem nos limitarmos a símbolos numéricos e/ou algoritmos, para poder favorecer um desenvolvimento autônomo do indivíduo na busca de suas soluções matemáticas.

As estratégias de divisão com as ideias de repartir em partes iguais e de medida estão relacionadas com a representação mental que as crianças fazem das situações, podendo fazer uso de materiais manipuláveis, estratégias próprias ou imagens mentais. Por exemplo, numa situação de divisão conhecida como medida, há a possibilidade da escolha de diferentes estratégias por um aluno que não opera com o algoritmo.

Relatamos, a seguir, algumas estratégias que já identificamos para o problema: *Cláudio tem 16 figurinhas repetidas. Vai presentear os seus amigos entregando 4 para cada um. Quantos amigos de Cláudio receberão 4 figurinhas?* Identificamos o número de figurinhas (dividendo) e a quantidade de figuras por amigos (divisor). São duas variáveis que mantém uma relação constante, caracterizando o conceito de medida. A ideia central é quantas vezes o 4 cabe dentro do 16. Uma das estratégias possíveis é que o aluno faça a contagem e represente as 16 figurinhas com alguma estratégia icônica, fazendo "risquinhos ou bolinhas", por exemplo. Depois faz agrupamentos de 4 em 4. Finalmente, conta quantos grupos conseguiu fazer e responde à questão. Algumas vezes, o aluno não tem clareza de que está utilizando, mentalmente, a ação de subtrair do todo o tamanho das partes.

Outra maneira de efetuar o cálculo é o aluno, mentalmente, ir somando de 4 em 4 até totalizar a quantidade de 16 figurinhas. Ao terminar o agrupamento, o aluno conta quantos grupos conseguiu formar. Ou, então, ir subtraindo do todo o tamanho das partes que, no exemplo acima, seria o seguinte: 16 – 4= 12; 12 – 4= 8; 8 – 4= 4; 4 – 4= 0. Algumas vezes quando um aluno utiliza a subtração sucessiva para efetuar a divisão, ele usa a seguinte sentença matemática equivocada: 16 – 4= 12 – 4= 8 – 4= 4 – 4= 0. O professor precisa dialogar com o aluno a respeito dessa representação equivocada com o uso de igualdades simultâneas. Foi possível obter o resultado correto, contudo, a linguagem matemática utilizada pelo aluno não está correta porque a sentença matemática - representada assim com as igualdades sucessivas - está indicando que 16 – 4= 0. Aqui sem um ou mais diálogos entre o professor e aluno a respeito dessa representação equivocada do sinal de igualdade, o aluno pode associar ideias erradas do uso da igualdade.

Outra estratégia frequente na resolução de problemas é o uso da correspondência na resolução de problemas. No exemplo acima, as duas variáveis são figurinhas por amigo e, nesse caso seriam, 4 figurinhas para um amigo, 4 figurinhas para o segundo amigo, 4 figurinhas para o terceiro amigo e, finalmente, 4 figurinhas para o quarto amigo. Visualmente, teríamos a seguinte representação:

Quadro 3: Representação de estratégia envolvendo o conceito de medida

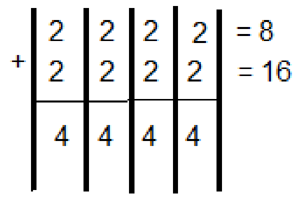
Figurinhas por amigo	**Amigos**
4 figurinhas	Primeiro amigo
4 figurinhas	Segundo amigo
4 figurinhas	Terceiro amigo
4 figurinhas	Quarto amigo

Outro tipo de estratégia que pode ser utilizada, segundo Jesus (2005), nos problemas de medida ou quantos cabe é a “contagem de múltiplos ou contagem por saltos”. A autora exemplifica, apresentando uma situação em que o aluno encontra “3 grupos de 5 pela contagem 5, 10, 15”.

Nos problemas de divisão partitiva conhecida também como equitativa ou distributiva, o dividendo e o divisor são duas variáveis não constantes. Nesse caso, é possível escolher tanto a estratégia de repartir em partes iguais ou fazer agrupamentos até a distribuição terminar. Essa divisão não exige do aluno nenhum conhecimento de contagem, pois o que precisa ser feito é distribuir para que todas as partes estejam, no final, do mesmo tamanho. O aluno pode realizar essa tarefa, distribuindo de 1 em 1 ou de 2 em 2, etc. Quando o aluno escolhe a estratégia de repartir em partes iguais a distribuição pode começar de um em um ou de dois em dois e ir somando os elementos até esgotar a grandeza que se quer dividir. Se o aluno opta por fazer agrupamentos, ele o faz por tentativa e erro. Exemplificamos a situação com o seguinte exemplo: *Cláudio têm 16 figurinhas e quer presentear seus 4 amigos. Quantas figurinhas cada um irá ganhar?*

Analisando o exemplo, temos o todo (16 figurinhas) e o número de partes (4 amigos). O que queremos saber é o tamanho associado a cada amigo. O aluno dispõe 16 objetos (aqui 16 figurinhas) e vai distribuindo conforme sua escolha, de um em um, ou de dois em dois ou de três em três até que todos tenham recebido as figurinhas. Depois conta o número de objetos de cada grupo e procura verificar se cada grupo ficou com a mesma quantidade. Se o aluno opta pela estratégia de agrupamentos, ele não tem certeza se o tamanho do agrupamento possibilitará uma distribuição equitativa. Por isso, ele vai fazendo tentativas de agrupamentos até conseguir fazer a divisão equitativa. Nessa estratégia, em algumas situações, o aluno precisará recomeçar a distribuição, caso as partes tenham ficado com quantidades diferentes. A ideia de divisão equitativa possibilita a seguinte estratégia:

Figura 1: Estratégia alternativa para divisão de repartir em partes iguais

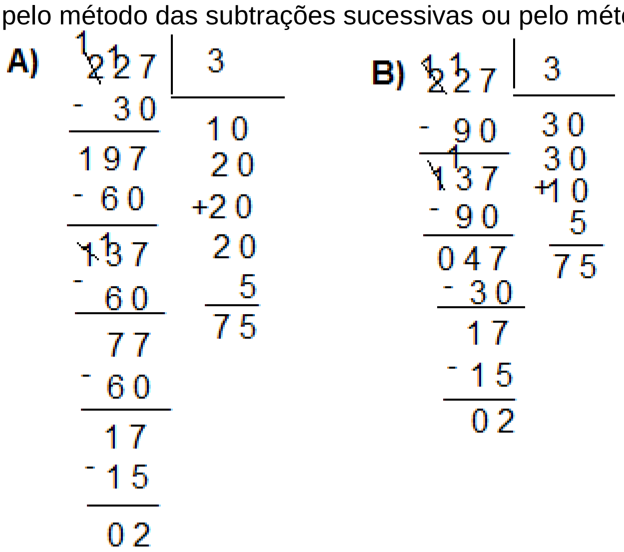


Do ponto de vista matemático, tanto o problema com a ideia de medida ou com a ideia de repartir em partes iguais, é possível obter o resultado, utilizando o mesmo algoritmo da divisão. Em outras palavras, podemos efetuar o cálculo com o mesmo algoritmo e obteremos o mesmo resultado. Contudo, as situações modeladas são diferentes na perspectiva das ideias que elas apresentam e das variáveis envolvidas.

2.6.2 – O algoritmo pelo método das subtrações sucessivas

Um outro método que vem ganhando espaço no âmbito escolar é o algoritmo de divisão por subtrações sucessivas. Esse algoritmo também é conhecido por algoritmo americano (TOLEDO & TOLEDO, 1997, p. 157) ou método das tentativas (IMENES, 2012, p. 218); (CENTURIÓN, 2005, p. 56;) ou divisão por estimativas (PASSOS e PASSOS 2009, p.174). É um método que se apoia no cálculo por estimativa. Tentamos dar certo número de elementos para cada um; se não for possível, tentaremos uma quantidade menor, e assim por diante. No exemplo de divisão 227 ÷ 3, é possível efetuarmos o algoritmo por subtrações sucessivas com diferentes estimativas, obtendo o mesmo resultado. Em alguns casos, a operação exige que se façam reagrupamentos das ordens, “desagrupar ou transportar”. No quociente, são gerados resultados parciais à medida que o algoritmo vai se desenvolvendo. Esse método exige que a operação de adição seja utilizada nos resultados parciais registrados no quociente, a fim de chegarmos ao resultado. Vejamos dois exemplos:

Figura 2: Algoritmo pelo método das subtrações sucessivas ou pelo método das estimativas



O método por subtrações sucessivas está relacionado à operação de subtração reiterada de parcelas. Depois que os alunos conhecerem diversas maneiras de realizar a divisão, utilizando estratégias não convencionais e tiverem compreendido a operação, apresentamos o método das subtrações sucessivas. Esse método exige do aluno a capacidade de estimar, além de ser necessário o conhecimento das tabuadas. Ao mesmo tempo em que o aluno faz a estimativa, ele precisa multiplicar, em seguida, subtrair e, finalmente, efetuar a adição. Segundo Mandarino (2005), o algoritmo da divisão é, sem dúvida,

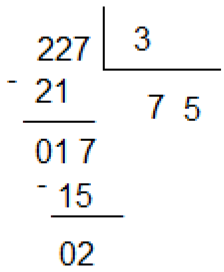
> o mais difícil e o mais complexo dentre os algoritmos das quatro operações, pois envolve, além do sistema de numeração, dos fatos básicos e do conceito de operação, a utilização das outras operações (adição, subtração e multiplicação) e a propriedade distributiva da divisão em relação à adição (p. 157).

Por isso, é interessante que o método das subtrações sucessivas seja apresentado antes dos outros dois métodos chamados de curto e longo, pois ele possibilita uma compreensão mais eficiente da operação que se está efetuando. Outra vantagem desse método é que o aluno tem condições de visualizar as etapas do algoritmo além de desenvolver a capacidade de estimar.

2.6.3 – As estratégias convencionais de divisão – os algoritmos longo e curto

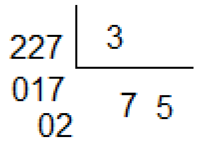
Um algoritmo pode ser considerado como um “procedimento ou uma sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma tarefa que se deseja realizar” (USISKIN, 1998, p. 7). Desde os tempos mais remotos na história da matemática, observamos que foram criados algoritmos diferentes. Nas séries iniciais do ensino fundamental, professores discutem qual algoritmo devem usar para iniciar o ensino de divisão. Os algoritmos referidos, inicialmente são o longo e o breve. Enquanto uns argumentam em favor do método breve (TOLEDO & TOLEDO, 1997) ou curto, outros defendem, enfaticamente, o processo longo. No processo euclidiano da divisão (TOLEDO & TOLEDO, 1997) o método longo tem a seguinte característica: a subtração aparece em evidência no algoritmo.

Figura 3: Processo do algoritmo longo



No conhecido método breve ou curto, a subtração não está explícita porque somente o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente é registrado (TOLEDO & TOLEDO, 1997). Esse método exige certa habilidade com o cálculo mental para desenvolver o algoritmo.

Figura 4: Processo do algoritmo breve ou curto



O método curto é uma “abreviação” do longo. Recomenda-se que primeiro o aluno compreenda as etapas envolvidas no processo do método longo. Quando o aluno tem confiança em proceder, autonomamente, na escolha do método, é possível que ele próprio decida o momento de empregar o método curto, quando estiver dominando o processo de divisão. Organizar o trabalho com o conteúdo de divisão nas séries iniciais do ensino fundamental auxilia o aluno a reconhecer que não há uma estratégia única para realizar o cálculo. Além disso, desenvolve no aluno a capacidade de escolher a estratégia mais eficiente para diferentes situações.

2.6.4 – O cálculo mental

Reconhecemos também, em nosso estudo, o cálculo mental entre as diferentes estratégias para solucionar um problema. Sabemos pela nossa experiência que os alunos associam o procedimento de cálculo, sem registro escrito, com a expressão “fiz de cabeça”. Identificamos nos dados coletados que alguns alunos quando têm menor habilidade com algoritmos ou em desenvolver uma estratégia, utilizando desenhos, preferem resolver o problema sem o registro escrito. As soluções desses alunos apresentam apenas a resposta do resultado por extenso. Consideramos o procedimento como cálculo mental, embora compreendamos que cálculo mental não seja apenas resolver sem registrar por escrito o processo de cálculo.

Parra (1996b) esclarece que “o cálculo mental não exclui a utilização de papel e lápis, particularmente no registro de cálculos intermediários em um processo que é, essencialmente, mental” (p. 188). A autora define que o procedimento de cálculo mental é

> o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo pré-estabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Os procedimentos de cálculo mental se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações (PARRA, 1996b, p. 189).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; 1997) relacionado a matemática, a modalidade de cálculo mental é uma competência importante que precisa ser introduzida pelo professor no ensino de aritmética com os alunos das séries iniciais.

2.6.5 - A multiplicação e a divisão através dos tempos

Os registros cronológicos acerca do surgimento e desenvolvimento da matemática, nos remete a Tales de Mileto em suas primeiras deduções em geometria por volta de 600 a.C. (EVES, 2011). Não estamos desconsiderando, é claro, as primeiras elaborações de fórmulas de mensuração realizadas pelas civilizações pré-helênicas da Mesopotâmia e do Egito que alguns estudiosos datam de 3.000 e 2.500 a.C. (ALMEIDA, 1998). Inicialmente, a humanidade conhecia o processo da contagem simples com pequenas quantidades. Provavelmente, a estratégia mais antiga de contagem baseava-se em algum método de registro simples pautado na correspondência biunívoca. Em outras palavras, os primitivos registravam e buscavam ter o controle das contagens utilizando gravetos ou fazendo entalhes em cascas de madeira ou nós em cordas ou faziam riscos em pedras.

Com o desenvolvimento da escrita, outros meios de registro foram surgindo para representar as quantidades. Esse relato referente ao surgimento das primeiras notações encontra respaldo, segundo Eves (2011, p. 26) “em relatórios de estudiosos de antropologia acerca dos povos primitivos”. Vários dos procedimentos de cálculos usados hoje na aritmética em multiplicação e divisão surgiram no século XV. Um dos instrumentos usados pelo homem para efetuar esses cálculos foi o ábaco, que segundo Eves (2011) pode ser considerado o instrumento mecânico mais antigo de computação usado pela humanidade.

Sabe-se que as primeiras formas de sociedade organizadas surgiram, de acordo com Eves (2011), às margens de grandes rios como Tigre, Eufrates, no oriente Médio e o Nilo, na África. Era fundamental desenvolver mecanismos que atendessem às necessidades primárias da sociedade que se estabelecia às margens dos referidos rios. Por isso, a matemática se estabeleceu naquele momento como uma ciência prática relacionada à agricultura, ao armazenamento e distribuição de alimentos, à engenharia e ao comércio. Formas de irrigação foram criadas para favorecer a fertilização do solo e o plantio. Grandes projetos tecnológicos surgiram com o desenvolvimento da matemática. Os povos que habitavam a região às margens dos rios Tigre e Eufrates conhecida como Mesopotâmia eram chamados de babilônios. Ali viveram dentre outros povos, os sumérios, responsáveis pela elaboração da escrita cuneiforme, que alguns estudiosos acreditam ser o primeiro sistema de escrita (ALMEIDA, 1998; EVES, 2011) criado pela humanidade. Utilizavam tábuas de argila que serviam para calcular e registrar as operações aritméticas. Faziam registros em forma de cunha nos blocos de argila.

Outra civilização primitiva de grande destaque para a matemática, segundo Eves (2011), foi a civilização egípcia. Estes foram os responsáveis pela criação dos primeiros símbolos matemáticos. Desenvolveram um sistema de numeração baseado no sistema decimal além de se dedicarem à geometria. Nesta civilização foram encontrados fragmentos dos primeiros registros de aritmética dessa escrita como o conhecido papiro Rhind escrito por um sacerdote egípcio chamado Ahmes aproximadamente em 1650 a.C. O papiro Rhind é um manual com as primeiras fontes de informações da matemática antiga dos egípcios. Esse papiro foi encontrado nos meados do século passado, possivelmente nas proximidades do templo de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, no Egito. Em 1858 foi comprado, no local, pelo antiquário escocês A. H. Rhind. O papiro de Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética de multiplicação e divisão, frações, cálculo de área, regras de três simples, trigonometria básica e geometria, além de outras aplicações matemáticas.

Figura 5: Papiro de Rhind escrito por Ahmes

Fonte: www.educ.fc.ul.pt

A primeira aritmética que se tem registro é a de Al-Khwarizmi (EVES, 2011), um erudito árabe que escreveu sobre álgebra e sobre os numerais hindus. Al-Khwarizmi introduziu os nove símbolos indianos para representar os algarismos e um círculo para representar o zero. Utilizavam nos cálculos os algoritmos hindus e um processo para testar e confirmar os resultados que por muito tempo foi utilizado por nós conhecido como *noves fora*. No comércio era utilizada uma aritmética objetivando explicar a escrita dos números e a resolução de cálculos. Esse material da álgebra e dos numerais hindus "provocou uma grande influência na Europa no século XII após ter sido traduzido para o latim" (EVES, 2011, p. 261).

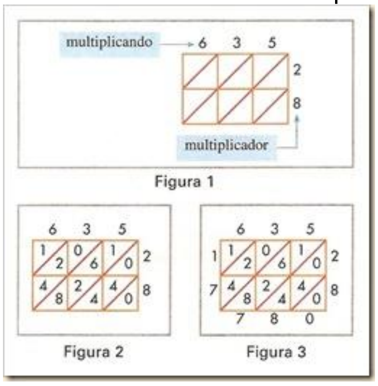
2.6.6 – Dois métodos antigos de multiplicação

As aritméticas dos séculos XV e XVI (EVES, 2011), no período das Grandes Navegações, abordavam detalhamento de algoritmos para as operações aritméticas fundamentais. Um dos métodos voltados para a operação de multiplicação foi o método da "grade" ou gelosia. Segundo Eves (2011) é possível que esse método tenha surgido inicialmente na Índia, pois

> aparece [...]em outros trabalhos hindus. Da Índia sua trajetória seguiu por trabalhos chineses, árabes e persas. Foi um dos métodos favoritos dos árabes, através dos quais passou para a Europa Ocidental (p. 323).

Esse método lembra uma grade de janela chamada “gelosia” e talvez tenha sido o método mais popular daquele tempo. Para usar este método primeiro organizamos as chamadas grades, cujo número de quadrinhos depende da quantidade de dígitos que compõem os números que se quer multiplicar. Na multiplicação de 635 por 28, por exemplo, temos no primeiro número três dígitos e no segundo número apenas dois dígitos. Teremos então uma quantidade de quadrinhos 3 x 2 = 6. Em cada quadradinho fazemos uma diagonal da direita para esquerda formando celas. Os dígitos do multiplicando, são escritos sobre as colunas dos quadradinhos e os dígitos do multiplicador, são escritos à direita, um em cada linha. Em cada cela registramos o produto obtido pela multiplicação de um dígito pelo outro da seguinte forma:

Figura 6: Método da “Gelosia” ou multiplicação árabe

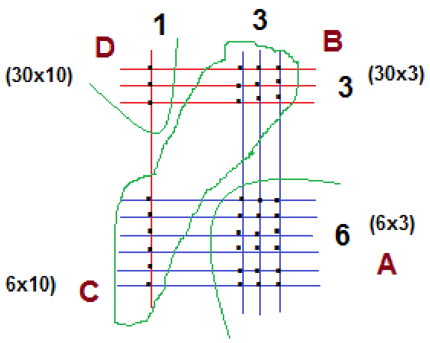


Fonte: topicosmatematicos.blogspot.com

Após efetuarmos todas as multiplicações entre os dígitos dos 2 fatores, somamos os números encontrados nas diagonais, da direita para a esquerda, para obtermos o resultado final de 635 x 28 que é igual a 17780. Note que a soma obtida na diagonal 8+ 2 + 6 + 1 excedeu a dez. Neste caso o dígito da dezena deve ser levado para a outra diagonal 4 + 2 + 0 + “1” e somado aos demais números. Nesse método “pode-se visualizar o poder da distributividade” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 45), em que 635 x 28= (600 x 20) + (600 x 8) + (30 x 20) + (30 x 8) + (5 x 20) + (5 x 8) = 12 000 + 4 800 + 600 + 240 + 100 + 40= 17 780.

Outro método prático desenvolvido pelos chineses envolve a utilização de varetas de bambu. O algoritmo que se forma são varetas dispostas na horizontal representando o multiplicador e na vertical o multiplicando. Os pontos de interseção são contados na diagonal usando a adição. Inicia-se a contagem pela direita. Se o resultado da soma for maior que nove, some o valor da dezena na próxima diagonal. Esse algoritmo ainda é ensinado por algumas civilizações, dentre elas, China e Japão. Suponhamos o seguinte exemplo: 36 x 13. Desenhe dois conjuntos de linhas horizontais, três na parte superior (linhas vermelhas) representando as 3 dezenas e seis na parte inferior (linhas azuis) representando as 6 unidades. Depois trace uma linha na vertical (linha vermelha) representando 1 dezena e três linhas na vertical (linhas azuis) representando as 3 unidades.

Figura 7: Multiplicação Chinesa



Observe que há quatro conjuntos de pontos de interseção realçados (A, B, C, D). Para encontrar o produto, primeiro soma-se o conjunto que designamos de A (18 pontos). O algarismo 8 ocupa a ordem das unidades. A dezena é transferida para o conjunto B + C (9 + 6 + 1 = 16), sendo que o algarismo 6 ocupa a ordem das dezenas e a dezena é transferida para o conjunto D (3 + 1 = 4) ocupando a ordem das centenas. O produto é igual a 468. Esse método funciona por que acionamos a propriedade distributiva da multiplicação: 36 x 13= (30 + 6) x (10 + 3) = (30 x 10) + (30 x 3) + (6 x 10) + (6 x 3)= 300 + 90 + 60 + 18= 468 (SÁ, 2010).

Finalmente, toda multiplicação é reversível, já que sempre será possível construir uma divisão utilizando os mesmos números, porém em ordem inversa. Dentro da concepção piagetiana, a noção de reversibilidade (KAMII, 1984) consiste na percepção de que um grupo de objetos, quando divididos em grupos menores, ou uma massa qualquer, dividida em várias porções, podem ser reconstituídas em sua quantidade inicial, por exemplo, 80 ÷ 10= 8 e 8 x 10= 80.

2.6.7 - Dois métodos antigos de divisão

Quanto à operação de divisão, o método mais comum usado no século XVI pelos gregos era conhecido como “galera ou Galé” (BOYER, 1974). Ele é ensinado no norte da África e no Oriente Médio até os dias de hoje. Era um procedimento considerado curto e adequado para efetuar uma divisão formando uma figura semelhante a um barco de guerra movido a remos (ver fig. 8).

Figura 8: Método de divisão “Galera ou Galé”

Fonte: BOYER, 1974, p.159

Outro método antigo[19] de divisão era dobrar sucessivamente o divisor (BOYER, 1974), com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2. Esse método utilizado pelos egípcios provavelmente no ano 3.100 a.C. não exigia que se soubesse a tabuada de multiplicação. Para a divisão egípcia era utilizada uma tabela com duas colunas, na primeira coluna colocava-se as duplicações a partir do um, e na segunda coluna duplicações a partir do divisor. Por exemplo, para dividir 324 : 12 procedia-se assim:

Figura 9: Método de divisão por duplicações

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192

As linhas destacadas (1-12, 2-24, 8-96, 16-192) contém os resultados parciais necessários para obter o quociente da divisão porque a soma de 12 + 24 + 96 + 192 = 324. Na primeira coluna era necessário efetuar a duplicação a partir do 1, uma ação

[19] http://www.matematica.br/historia/multdiveg.html. Acesso em 01/2014.

possível de ser realizada tanto pela adição ou multiplicação. Na segunda coluna efetuava-se a duplicação a partir do divisor 12 até o 192, pois o próximo número seria 384, que é maior que 324, e por isso não deveriam continuar a duplicação. O resultado seria a soma dos correspondentes da primeira coluna. Assim, o valor procurado como resultado de 324÷12 é igual ao resultado da soma de 1+ 2 + 8 + 16, que é igual a 27.

CAPÍTULO III
PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Introdução

Neste capítulo, delimitamos o caminho metodológico escolhido para a pesquisa e descrevemos os procedimentos de coleta de dados. Também trazemos uma descrição breve da escola, da turma em geral, da professora e dos alunos envolvidos na pesquisa.

3.1 – O ambiente da pesquisa

Esta pesquisa de mestrado de natureza qualitativa é caracterizada também como estudo de caso, pois a pesquisadora estava imersa no ambiente de pesquisa, além de comprometer-se com pesquisa bibliográfica, documental e pesquisa de campo. A pesquisa etnográfica se apresenta pela prática da observação, descrição e análise dos valores, hábitos, crenças, práticas e os comportamentos de um grupo social (ANDRÉ, 2005, p. 27). O estudo procurou responder aos seguintes questionamentos: (i) Que estratégias e ideias de divisão alunos de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem antes de um experimento de ensino? e (ii) Quais estratégias e ideias de divisão alunos de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental evidenciam após esse experimento?

Realizamos nossa pesquisa no ambiente escolar da sala de aula e nos espaços comuns de uma escola pública municipal de Vitória, no período de junho a dezembro de 2013. Usamos como ferramentas de coleta de dados a observação, o diário de bordo, gravação em áudio, registro fotográfico, conversa informal com os alunos, entrevista com a professora titular da turma e atividades matemáticas. Junto com nossa orientadora e com a professora regente da turma pesquisada, planejamos as intervenções didáticas que ocorreriam nesse experimento de ensino. Optamos por aplicar a metodologia de pesquisa do tipo estudo de caso porque este trabalho é um estudo em que o pesquisador se faz presente no campo. O pesquisador ficou envolvido na realidade de vida do grupo pesquisado na sala de aula de matemática, procurando conhecer suas relações, seus hábitos, crenças, valores e descrever seu comportamento e formas de aprendizagem (ANDRÉ, 2005).

A pesquisa de campo foi desenvolvida em uma turma de 3ª série/4º ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Vitória, no período de junho a dezembro de 2013. Nos trabalhos de transcrição e organização de dados coletados, percebemos que detalhes como as falas dos alunos ou os discursos feitos por nós escapavam de nossos olhares e escrita, por mais atentos e cuidadosos que tentávamos ser. Por isso, cientes da complexidade que é a ação no campo da pesquisa, estamos conscientes de que não devemos imaginar algo a respeito da realidade e nem considerar que conseguimos esgotar a totalidade de informações.

3.2 – Contribuições do estudo exploratório

Em 08 de outubro de 2012, visitamos uma escola pública do município de Vitória para iniciar as atividades de um estudo exploratório. Essa escola foi escolhida por termos sido convidadas por Alice[20], professora titular do 5º ano, a fim de realizarmos algumas aulas de divisão. Participamos do planejamento com Alice durante dois dias. Tivemos três encontros presenciais e também trocamos ideias pelo telefone em dois dias. Levamos em consideração que os alunos já tinham conhecimento a respeito das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Por isso, planejamos uma sequência de atividades, abordando as quatro operações aritméticas com foco na divisão. Conduzimos quatro aulas de divisão com números naturais, sem deixar de explorar as outras operações.

O primeiro momento do estudo exploratório teve duração de duas aulas de 50 minutos cada. Nossa ideia inicial era explorar possibilidades pedagógicas para trabalhar divisão em uma turma de 4ª série/5º ano. Eram 12 alunos na faixa etária entre 12 a 15 anos. E também, nosso propósito era valorizar as estratégias dos alunos de modo a contribuir para o avanço da aprendizagem matemática deles. Começamos com um

[20]Esta professora também participa do Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo (GEEM-ES) e, ela nos convidou em um encontro do GEEM-ES de 2012.

texto jornalístico, falando de dívida, salário comprometido e gastos excessivos. Dentro do texto, abordamos alguns significados da palavra problema e, informalmente, dialogamos com os alunos sobre problemas em várias situações da vida. Após a primeira aula, a professora Alice nos contou que não tinha pensado em iniciar as tarefas com um texto jornalístico, como fizemos.

O segundo momento também durou duas aulas de 50 minutos cada e foi planejado com o intuito de desenvolver e aprofundar as duas ideias básicas de divisão e das operações de adição, subtração e multiplicação. Nessa etapa exploratória da pesquisa, enfrentamos algumas dificuldades enquanto professora pesquisadora iniciante. Vimos que a pesquisa exige disciplina, criatividade, diálogo com a realidade e compromisso histórico com os sujeitos. A realidade a que nos referimos é constituída pela representação de mundo, a partir da perspectiva dos sujeitos desta pesquisa e sob a ótica da pesquisadora iniciante e da pesquisadora orientadora. Temos consciência de que alguns fatos nos escaparam, talvez detalhes de valor que se perderam na dinâmica cotidiana do espaço escolar. Para superar esses obstáculos, nós procuramos transcrever, imediatamente, os dados produzidos e coletados junto aos sujeitos desse estudo exploratório, tentando manter a real situação captada pelo nosso olhar de pesquisador iniciante. Dessa forma, reconhecemos que os resultados favoráveis desse trabalho, apesar dos desafios, nos motivaram a dar prosseguimento com os estudos definitivos em 2013.

3.3 - Os contextos envolvidos

Esta pesquisa de mestrado se dividiu em dois momentos marcados por contextos diferentes. O estudo exploratório desenvolvido em 2012 e apresentado na qualificação foi aplicado em uma turma de 4ª série/5º ano de outra escola da rede municipal de Vitória, a que chamaremos de Escola I e abrangeu alunos defasados em idade-série. A turma com a qual trabalhamos nessa etapa da pesquisa fazia parte de um projeto de aceleração e tinha somente uma professora, em 2012, que abordava todas as áreas do conhecimento. A temática da pesquisa naquele momento era “as quatro operações dentro da resolução de problemas”. No ano de 2013, esses alunos foram remanejados, separadamente, em duas turmas de níveis diferentes. Alguns alunos avançaram para uma turma de 6º ano e outros avançaram para uma turma de 7º ano. Alguns trocaram de turno na mesma escola.

A maioria dos alunos permaneceu no matutino, compondo com outros colegas uma turma do 7º ano, o que nos levou a optar por continuarmos com essa turma. Todavia, os alunos agora tinham uma professora específica de matemática, com um conteúdo direcionado para o público de ensino fundamental II. Havia fôlego para encarar os desafios que, certamente viriam, mas havia uma realidade distante da experiência da professora pesquisadora. A realidade seria caminhar por estradas nunca antes percorridas, uma vez que a formação acadêmica da professora pesquisadora é referente ao ensino fundamental I com turmas de 1º ao 5º ano.

Na apresentação do estudo exploratório na etapa de qualificação, levamos dados coletados com esses alunos, relacionados ao período que ficamos com eles, em 2012. A banca contribuiu com direcionamentos relevantes à temática daquele momento que envolvia as quatro operações. Comentaram que esse tema seria muito amplo e destacaram que o foco das aulas foi maior na operação de divisão. Isso aconteceu porque os dados coletados foram mais focalizados, inicialmente, na operação de divisão, atendendo ao pedido da professora Alice. Os professores da banca contribuíram também, pontuando alguns ajustes na metodologia. Fizeram indicações de leituras e atividades para a continuidade de nossa investigação definitiva.

Em maio de 2013, a orientadora ao perceber nossas limitações em trabalhar com esses sujeitos em uma turma de 7º ano e ao saber de nossa preferência e experiência com alunos do ensino fundamental I, sugeriu que procurássemos uma nova escola. Foi então que, em junho de 2013, visitamos outra escola da rede municipal pública de Vitória. Vamos nos referir a essa escola como “Encantos do Saber” e nos apresentamos à professora, ao diretor e à pedagoga e, finalmente, à turma da 3ª série/4ºano. Esse redirecionamento da pesquisa exigiu de nós empenho, determinação, coragem, e readaptação do projeto, pois já havíamos qualificado.

3.3.1 – A escola

A pesquisa definitiva foi realizada numa escola da rede municipal de Vitória, no estado do Espírito Santo.

Figura 10 – Fachada externa da escola "Encantos do Saber"

Fonte: Diário de Vitória (legado.vitoria.es.gov.br)

Devido ao espaço físico limitado, a escola em questão tem algumas especificidades. Quando a lei 9.394 determinou a obrigatoriedade do ensino fundamental de 9 anos, em 2010, essa escola não ofereceu salas de aulas para os alunos da faixa etária de 6 anos, que ingressam no 1º ano. No entanto, devido à demanda da comunidade, esses alunos foram matriculados na referida escola, mas permaneceram no espaço físico do centro municipal de educação infantil. Essa logística permaneceu até 2012.

Em 2013, por determinação da Secretaria Municipal de Educação, os alunos de 6 anos deveriam frequentar o espaço físico da própria escola. Então, a escola absorveu duas turmas de 1º ano e não ofereceu a turma do 9º ano. Assim, os alunos, ao ingressarem nessa escola, permanecem até o 8º ano e se deslocam para outra escola municipal inserida na própria comunidade, a fim de finalizar o ensino fundamental I com a turma do 9º ano. O ensino fundamental é distribuído em dois turnos, sendo que no turno matutino estão os alunos da 4ª série/5º ano à 7ª série/8º ano, e no turno vespertino aqueles do 1º ano à 3ª série/4º ano. A escola dispõe de oito salas, sendo que há duas para cada série/ano; para o turno matutino também há duas salas para cada série/ano.

3.3.2 – A turma

A turma de 3ª série/4º ano do ensino fundamental, que nós investigamos, possui 26 alunos. São alunos na faixa etária de 10 – 11 anos (sendo 12 meninos e 14 meninas). Os alunos têm sete aulas semanais de matemática, todas com 50 minutos de duração. Em sua grande maioria, os alunos dessa escola começam o 1º ano e permanecem até o 8º ano na mesma escola. É prática de a professora regente estabelecer a cada ano algumas normas de trabalho pedagógicas e disciplinares com os alunos. Por isso, ela fez com a turma um contrato pedagógico no início do ano letivo, ao elaborar algumas regras negociadas entre eles. O ambiente da sala de aula era baseado no respeito mútuo, e o esforço de cada aluno era valorizado pela professora Suelen[21].

Quando iniciamos nossa coleta de dados na turma da 3ª série/4º ano, alguns conteúdos matemáticos já haviam sido trabalhados pela professora da turma. A professora já havia abordado sistema de numeração decimal; adição, subtração e multiplicação com números naturais; medidas de capacidade (com receitas culinárias); sistema monetário - reconhecimento de cédulas e moedas de nosso sistema monetário - preenchimento de cheque - relação de compra e venda - desconto - dívida - compra com cartão de crédito - atacado e varejo.

3.3.3 – A professora titular da turma

No dia 30 de junho de 2013, realizamos uma entrevista com a professora titular da 3ª série/4º ano. Nossa intenção em fazer a entrevista era de obter algumas informações sobre a formação de Suelen. Também desejávamos observar como ela compreendia o processo de aprendizagem de matemática que a turma estava vivendo. Isso nos ajudou a ter elementos para compor o perfil da turma.

---

[21]Nome fictício atribuído à professora titular da turma da 4ª série/5º ano durante a pesquisa definitiva, em 2013.

Suelen fez o curso de magistério do 2º grau no ensino médio e fez licenciatura em Artes Plásticas pela Universidade Federal do Espírito Santo. Trabalha há vinte e dois anos na prefeitura municipal, lecionando para o ensino fundamental I. Ela nos relatou que no seu curso de magistério no ensino médio, foram ensinadas, discutidas e exploradas algumas estratégias empregadas na resolução da operação de divisão. Entretanto, no curso superior, as discussões não foram realizadas, haja vista as especificidades do curso de licenciatura escolhido por ela. Suelen nos informou que ainda no magistério, nas “saudosas aulas de didática da matemática”, menção carinhosa dita por ela, o “discurso era muito voltado para a confecção de material concreto e, principalmente, a utilização do quadro valor de lugar[22] (QVL)”, recurso esse que ela faz questão de frisar ser usado até hoje em suas aulas.

Sentimos, na fala de Suelen, a importância que ela atribuía ao material e também ao uso de material concreto (tampinhas, palitos de picolé) – que disponibilizava em suas aulas de matemática - como objetos indispensáveis na explicação dos conteúdos matemáticos que, segundo ela, tinha a possibilidade de “promover o raciocínio e a compreensão”. Ela fez um desabafo, quando se lembrou dos seus professores de matemática, alegando não considerá-los como bons profissionais e admitiu existir um “hiato” entre os professores e os alunos. Em seguida, comentou que o “amor pelo ofício sempre falou mais alto’’ e procurou buscar e/ou adaptar estratégias que dessem condições do aluno aprender.

Suelen relatou que se sentia preparada para desempenhar o seu papel de mediadora da aprendizagem porquanto cria que o “aprendizado não é finito e a necessidade de se atualizar, inovar e tornar as aulas mais produtivas deve ser inerente ao ofício de professor”. Comentou que tinha bem definido em sua concepção que não possuía o “aluno ideal e sim o aluno real”, e firme nessa convicção preparava suas aulas sempre atenta às características peculiares de seu público.

---

[22] É um instrumento de aprendizagem em matemática, geralmente usado nos anos inicias do ensino fundamental. Auxilia na introdução dos conceitos de unidade, dezenas e centenas e no processo de contagem, formação dos números e operações matemáticas. (Definição retirada do site: www.qvl.com.br, acesso em 12/01/2014)

A professora Suelen pensava ser possível iniciar o ensino de divisão independentemente de série/ano, pelo simples fato de que “toda bagagem que o indivíduo traz já oferece condições para tal aprendizagem”. Ela acrescentou ainda que os professores precisavam “adaptar e oportunizar atividades de acordo com a faixa etária e maturidade das crianças envolvidas”. Suelen explicou que, em seus planejamentos, procurava modificar os enunciados das atividades adaptadas de livros ou de seus cadernos de planejamentos de anos anteriores, por ter aversão aos enunciados tradicionais. Também informou que tentava envolver seus alunos nas situações-problema, tornando-os personagens, dramatizando os enunciados dos problemas, usando encartes de propaganda, material concreto (tampinhas de garrafa pet e palitos de picolé), fazendo o uso do quadro valor de lugar.

Além disso, Suelen elaborava receitas de culinária e fazia uso de instrumentos de medida, dos quais, citou trena, fita métrica e balança, na realização de atividades que necessitavam de tais ferramentas. Informou que planejava suas aulas visitando alguns sites educativos e levava os alunos para o laboratório de informática, que era visto por ela como um espaço potencializador da aprendizagem, para trabalhar conteúdos que estavam sendo ensinados em sala de aula. Ainda relatou que confeccionava folhas de cheque para preenchimento, porquanto era sua preocupação levar as situações da vida para dentro de suas aulas.

Notamos que Suelen é uma professora engajada no desafio de alcançar uma educação de qualidade. Tem a prática de planejar atividades interessantes que estimulem os alunos a questionar e a se sentirem protagonistas do processo de aprendizagem. Em sua agenda semanal, ela tinha um momento específico para o planejamento com a pedagoga, articulando a elaboração de atividades e eventos de exposição do trabalho pedagógico. Suelen nos contava que estava empolgada com a maneira que estava aprendendo com a nossa pesquisa para ensinar divisão. Relatou que se sentiu um pouco incomodada ao perceber que vinha ensinando aos alunos sobre o conteúdo de divisão, sem ter clareza quanto às ideias sobre a operação. Comentamos com ela que todos nós estávamos aprendendo e que, antes dos estudos de mestrado, compartilhávamos dessa concepção de divisão. Suelen comentou que ficava ansiosa em testar as estratégias com a divisão e que, certamente, passaria para o filho todo seu aprendizado.

3.3.4 – Os alunos sujeitos da pesquisa

Na primeira vez que nos apresentamos aos alunos, explicamos que faríamos uso de registros de acontecimentos e atividades realizadas com a turma. Informamos também que trabalharíamos com o gravador e a máquina fotográfica para registrarmos esses fatos. Esclarecemos aos alunos que a identidade de cada um seria preservada e que, para isso, seria necessário escolher nomes fictícios para representá-los. Portanto, os nomes para identificar cada participante da pesquisa mencionados por nós, são fictícios. Escolher os alunos e as produções concretizadas para compor nossa análise não foi simples.

Demoramo-nos nas informações que foram produzidas por eles, nos dados coletados no período de observação, no perfil do aluno e, finalmente, nas soluções que nos davam elementos para responder nossa questão de investigação. Aprofundamo-nos na análise de dados de dois alunos identificados pelos nomes fictícios de Samanta e Nicolau. Verificamos que esses alunos apresentavam em suas respostas soluções semelhantes às de outros alunos da sala. Ambos eram alunos assíduos e participativos durante as aulas e desempenharam bem as superações e dificuldades observadas em outros alunos da turma. Para a fase de coleta de dados, entregamos um termo de compromisso (APENDICE A, B, C) aos responsáveis dos alunos e ao diretor da referida escola, a fim de que todos ficassem cientes dos objetivos de nossa permanência na sala de aula, solicitando a autorização para nossa entrada na unidade.

3.4 - O processo de elaboração da atividade de pesquisa definitiva

No transcorrer do período de observação na turma de Suelen, de junho a setembro de 2013, a atividade da pesquisa definitiva foi sendo construída. Pudemos notar com as observações que alguns alunos ficavam na dependência do auxílio da professora para resolverem as tarefas matemáticas. Esses alunos não desenvolviam estratégias próprias de resolução de atividades sem que a professora desse alguma sugestão de solução. Ao fazer a mediação com alguns alunos é importante tentar aproximar a realidade deles com o que é proposto nos problemas trabalhados na sala de aula. O que nos parece possível ao modelarmos a situação-problema, trazendo semelhanças com os contextos vivenciados pelos alunos.

Suelen nos relatou que tenta criar mecanismos para contextualizar as situações-problema. Ela ajustou os conteúdos matemáticos para seus alunos de acordo com a proposta curricular dos PCN (BRASIL, 1997) para o 3º trimestre seguido de atividades avaliativas. Uma prática do planejamento de Suelen era inserir no enunciado do problema os nomes de seus alunos. Era comum propor problemas com relações de compra e venda ou com referência às receitas trabalhadas na disciplina de língua portuguesa.

Ao iniciar o último trimestre do ano letivo de 2013, a professora Suelen nos convidou para ministrar o conteúdo de divisão. Falamos-lhe que nosso tema de pesquisa seria o conteúdo de divisão. Não nos estava definida nenhuma intervenção pedagógica realizada pela professora pesquisadora iniciante. Contudo, Suelen propõe em nossos diálogos que o trabalho de introdução à divisão fosse desenvolvido por nós. Conversando com Suelen e com nossa orientadora, sentimos a necessidade de explorar o conceito de divisão antes de trabalhar com procedimentos de resolução. Para isso, elaboramos uma sequência de atividades de divisão, incluindo as duas ideias básicas – repartir em partes iguais e medida – a fim de trabalhar algumas estratégias alternativas de resolução. Tínhamos consciência de que a sequência de atividades aplicadas para coleta de dados era flexível. Por isso, no desenrolar de nosso trabalho, fazíamos o movimento de avaliar os resultados parciais, levar em consideração os sucessos e insucessos das tarefas, ajustar a metodologia de ensino de acordo com as necessidades dos alunos, validar o que funcionou e não funcionou. Nosso objetivo durante o trabalho de intervenção pedagógica foi de ampliar as potencialidades de aprendizagens de todos os alunos.

3.4.1 - A atividade de pesquisa

A organização da atividade de pesquisa foi planejada em duas sequências: atividade diagnóstica e atividade de ensino. As duas sequências constaram de situações-problema com números cujos algarismos representavam números múltiplos do divisor, conforme Toledo & Toledo (1997) sugerem para a primeira etapa do trabalho com divisão. A sequência de atividades diagnósticas constou da resolução de três situações-problema com a ideia de medida, três situações-problema com a ideia de repartir em partes iguais, elaboração de três problemas, implicando a ideia de medida e elaboração de três problemas de repartir em partes iguais.

Na atividade 1, que aconteceu no dia 16 de setembro de 2013, aplicamos três situações-problema com a ideia de medida. Durante a aplicação da atividade, os alunos tiveram um tempo para fazerem a leitura silenciosa e desenvolver seus registros. Na atividade 2, realizada no dia 17 de setembro de 2013, aplicamos três situações-problema, envolvendo a ideia de repartir em partes iguais. Do mesmo modo, oferecemos um tempo para que os alunos fizessem a leitura individualmente e desenvolvessem seus registros. A atividade 3 aconteceu no dia 01 de outubro de 2013 e propôs a criação de problemas feita pelos alunos, abordando a ideia de repartir em partes iguais. Os alunos deveriam criar uma situação-problema e resolver com estratégias pessoais. A atividade 4 foi realizada em 4 de outubro de 2013, finalizando a sequência de atividades diagnósticas. Essa atividade consistia em criar situações-problema, abordando a ideia de divisão como medida ou quantos cabe.

A sequência de atividades de ensino foi composta por dez atividades. Para análise de dados na pesquisa, selecionamos quatro atividades. As atividades escolhidas por nós possibilitou agrupar informações relevantes a respeito das ideias e estratégias que esses alunos passaram a ter a respeito de divisão, após o ensino formal. A atividade 1, realizada em 7 de outubro de 2013, consistiu em rever as situações-problema trabalhadas na atividade diagnóstica e explorar possíveis estratégias de resolução. A atividade 2, realizada em 4 de novembro de 2013, foi uma atividade avaliativa composta por situações-problema planejada pela professora regente. A atividade 3, do dia 11 de novembro de 2013, aconteceu em duas etapas. Na primeira etapa os alunos tinham uma conta de dividir, e eles deveriam efetuá-la através do algoritmo de divisão por subtrações sucessivas. Na segunda etapa, os alunos criariam duas contas de dividir por 2 e duas contas de dividir por 3, utilizando o algoritmo por subtrações sucessivas. A atividade 4 foi desenvolvida em 25 de novembro e constava de três contas para resolver, aplicando o algoritmo por subtrações sucessivas.

Sequência de atividades diagnósticas

a) Atividade diagnóstica 1

A atividade foi desenvolvida no dia 16/09 e era composta de três situações-problema, envolvendo a ideia de divisão como medida. Para cada problema, os alunos tiveram um tempo de 10 minutos. Foi explicado que os alunos fizessem a leitura individualmente e criassem a estratégia para solucionar o problema. Após terem concluído a atividade, fizemos o registro de cada aluno, fotografando a solução da atividade e registrando no diário de campo alguns procedimentos que foram possíveis de acompanhar. Nessa etapa da coleta, nós não fizemos nenhuma correção das atividades aplicadas.

Objetivo da atividade: Verificar de que maneira os alunos procedem para resolver situações que propõem a divisão com a ideia de medida.

Figura 11: Primeira atividade diagnóstica

Problema 1: Tenho 15 balas e vou entregar 3 balas para cada criança. Quantas crianças participarão da distribuição?

Problema 2: Tenho R$ 18,00 reais e quero comprar algumas caixas de bombom que custam R$ 6,00 reais cada caixa. Quantas caixas eu posso comprar com essa quantia?

Problema 3: Cláudio comprou 12 carrinhos e queria guardar 3 carrinhos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar para guardar os carrinhos?

Propusemos situações-problema que fossem familiares aos alunos e que possibilitassem o uso de materiais manipuláveis, ou não, de acordo com a opção de cada aluno. Em todos os problemas da atividade diagnóstica, usamos quantidades pequenas para os alunos dividirem.

b) Atividade diagnóstica 2

A atividade foi aplicada em 17/09 e era composta de três situações-problema incluindo a ideia de repartir em partes iguais. Os alunos tiveram um tempo de dez minutos para cada problema. Foi solicitado que os alunos fizessem a leitura individualmente, criassem a estratégia e solucionassem a questão. Nessa etapa da coleta, nós também não fizemos nenhuma correção das atividades aplicadas. Usamos os mesmos números e apenas mudamos as situações-problema.

Objetivo da atividade: Verificar de que maneira os alunos procedem para resolver situações de divisão que propõem a ideia de repartir em partes iguais.

Figura 12: Segunda atividade diagnóstica

Problema 1: Tenho 15 balas e quero dividir igualmente entre 5 crianças? Quantas balas cada criança receberá? Problema 2: Paguei R$ 18,00 reais por seis caixas de suco da mesma marca e do mesmo sabor. Qual o preço de uma caixa? Problema 3: Lúcio comprou 12 carrinhos e tinha três caixinhas. Ele queria guardar a mesma quantidade de carrinhos em todas as caixas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa?

c) Atividade diagnóstica 3

Nessa atividade trabalhada em 01/10, os alunos tiveram um tempo de 10 minutos para criarem três situações-problema de divisão, envolvendo a ideia de medida. Deveriam também solucionar cada situação-problema elaborada por eles com suas estratégias pessoais. Informamos aos alunos que poderiam usar os mesmos dados numéricos dos problemas propostos por nós. Trouxemos para apreciação e análise uma das situações-problema produzida pelos alunos.

Objetivo da atividade: Verificar se está contida na situação-problema produzida pelo aluno a ideia de divisão de medida (quantos cabe). Diagnosticar o procedimento usado na resolução do problema.

Figura 13: Terceira atividade diagnóstica

Invente um problema de divisão semelhante à distribuição do problema 1. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente. Invente um problema de divisão semelhante à distribuição do problema 2. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente. Invente um problema de divisão semelhante à distribuição do problema 3. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente.

d) Atividade diagnóstica 4

Nessa atividade ministrada em 04/10, os alunos tiveram um tempo de 10 minutos para criar três situações-problema de divisão, envolvendo a ideia de repartir em partes iguais. Deveriam também solucionar cada situação-problema elaborada por eles com suas estratégias pessoais. Informamos aos alunos que poderiam usar os mesmos dados numéricos dos problemas propostos por nós. Nessa etapa da coleta, nós também não fizemos nenhuma correção das atividades aplicadas.

Objetivo da atividade: Verificar se está contida na situação-problema produzida pelo aluno a ideia de divisão de repartir em partes iguais. Diagnosticar o procedimento utilizado na resolução do problema.

Figura 14: Quarta atividade diagnóstica

Invente um problema de divisão semelhante ao problema 1 de distribuir em partes iguais. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente. Invente um problema de divisão semelhante ao problema 2 de distribuir em partes iguais. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente. Invente um problema de divisão semelhante ao problema 3 de distribuir em partes iguais. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente.

Sequência de atividades de ensino

a) Atividade de ensino 1

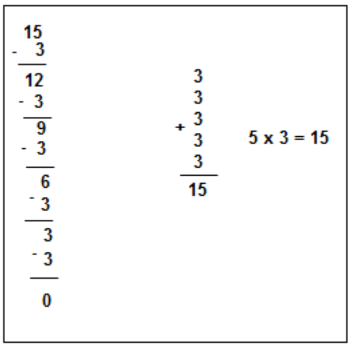
Objetivo da atividade: Discutir e explorar os diferentes caminhos para resolução de situações-problema.

Algumas atividades na etapa de ensino formal foram selecionadas por nós, a fim de mostrar uma relação com nosso objetivo e questionamento de pesquisa. A atividade de ensino 1 foi desenvolvida no tempo de duas aulas de 50 minutos cada, no dia 07/10 e possibilitou rever as soluções apresentadas por eles, socializar e discutir outros caminhos para a resolução. Mostramos aos alunos que todas as estratégias diferentes apresentadas na lousa estavam corretas e eram possíveis, inclusive o desenho, para solucionar as situações–problema. Na primeira aula, exploramos os problemas com a ideia de repartir em partes iguais, aplicados na atividade diagnóstica. Na segunda aula, abordamos as possíveis estratégias de resolução para as situações-problema com a ideia de medida, aplicados na atividade diagnóstica. (Ver APÊNDICE E e APÊNDICE F).

Para cada situação-problema, discutimos com os alunos o enunciado, a pergunta do problema, as informações contidas no enunciado, as ações que estavam por trás de cada situação e as possíveis estratégias para resolvê-los. No problema *“Tenho 15 balas e vou entregar 3 balas para cada criança. Quantas crianças participarão da distribuição?*”. Questionamos os alunos sobre o que precisava ser descoberto no texto. Solicitamos que sinalizassem a frase que representava a pergunta do problema.

Provocamos algumas conjecturas na turma das possibilidades de distribuição, assim como Polya (1995/1945) sugere em seu livro, e como Hoffman (2012) fez em sua pesquisa com alunos resolvendo problemas. Fizemos várias demonstrações, representando as seguintes estratégias:

Figura 15: Estratégias possíveis de divisão na resolução de problemas com a ideia de medida



Os alunos compreenderam que, na primeira representação, a quantidade “três” era retirada do todo (15) e foi possível operar a ação de tirar, implicando na subtração. Na segunda representação, alguns alunos disseram que era uma soma de 3 em 3 até chegar o total de balas (15). Finalmente, na terceira representação, explicaram que a resposta seria 5 crianças, porque 5 x 3 dava o resultado 15. Notamos que, ao provocarmos que os alunos tentassem elaborar outras estratégias que não fossem o desenho, mostraram que tinham conhecimento de alternativas para encontrar o resultado.

Seguindo a mesma metodologia, exploramos os outros dois problemas de divisão com a ideia de medida. Refletimos com a turma que a estratégia icônica dava condições de resolver as situações-problema, contudo, não facilitava a resolução em problemas com números maiores.

b) Atividade de ensino 2

Objetivo da atividade: Identificar que caminhos de solução seriam escolhidos pelos alunos para resolver situações-problema; verificar a aprendizagem das ideias de divisão.

A professora titular da turma, após termos efetuado vários problemas com diferentes estratégias, elaborou uma avaliação de matemática (ANEXO 2) com situações-problema para aplicar à turma. A avaliação foi aplicada no dia 04/11, no tempo de duas aulas de 50 minutos. Ela esclareceu aos alunos que consideraria qualquer estratégia escolhida por eles, desde que fosse um caminho para encontrar o resultado corretamente. Embora não tenhamos feito nenhuma intervenção durante a aplicação da avaliação, escolhemos considerá-la como uma atividade de ensino, compreendendo que as problematizações geradas nas aulas, que a antecederam, deram subsídios para que os alunos pudessem resolver as questões propostas.

c) Atividade de ensino 3

Objetivo da atividade: Ensinar o método do algoritmo por subtrações sucessivas para resolver situações-problema de divisão.

A aula foi realizada no dia 11 de novembro, durante 50 minutos. A aula foi dialogada e expositiva, apresentando e explorando o algoritmo da divisão por subtrações sucessivas para resolver os cálculos de 24÷3 e 92÷4. Já havíamos feito algumas abordagens e reflexões com os alunos a respeito da relação da operação de divisão com a subtração. Nesse momento, repetimos esse procedimento, mas apresentando aos alunos a chave da divisão na conta armada. Explicamos-lhes que nossa tarefa agora era compreender as relações da divisão com as outras operações e organizá-la dentro do algoritmo. Essa atividade foi desenvolvida no tempo de uma aula, no dia 11/11 e consistiu na tarefa de os alunos terem que elaborar duas contas que fossem divisíveis por 2 e duas contas por 3. Novamente, tínhamos o objetivo de verificar se os alunos haviam aprendido a desenvolver o algoritmo de divisão por subtrações sucessivas (Ver APÊNDICE I.).

d) Atividade de ensino 4

Objetivo da atividade: Desenvolver o cálculo de divisão pelo método das subtrações sucessivas.

A atividade foi desenvolvida no dia 25 de novembro durante duas aulas de 50 minutos. Foram apresentadas três contas de divisão para que os alunos pudessem efetuar as mesmas pelo método das subtrações sucessivas. Escolhemos propor contas de dividir com números maiores, a fim de que os alunos evitassem utilizar estratégias icônicas, pois, notamos que alguns alunos tendiam a utilizar apenas a representação icônica, quando as quantidades eram menores que 20. A atividade aparece no APÊNDICE J.

3.5 – Instrumentos utilizados para coletar e produzir dados

Exploramos vários recursos para coleta e produção de dados da pesquisa. Dentre eles, destacamos observações de aulas, registros no diário de campo, gravações de áudio, conversas informais, entrevistas e atividades que descrevemos a seguir.

3.5.1 - Diário de campo

Utilizamos esse instrumento em todos os momentos da pesquisa. Usamos para registrar as nossas observações - durante nossa permanência em campo -, reflexões sobre estudos e leituras, informações sobre os alunos, conversas com os alunos e com a professora titular da turma e conversas e sugestões com a orientadora. Nossa orientadora, preocupada com os registros dos detalhes que surgiam, no decorrer da pesquisa de campo, sugeriu o uso ininterrupto desse instrumento de coleta de dados (SANTOS-WAGNER, 2013). Alertou-nos que anotássemos as informações da aula logo após o seu término. Esta orientação buscava garantir a captação de fatos ou fragmentos ocorridos durante a aula, reflexão e análise desses dados, de modo que outros planejamentos fossem realizados ou adaptados. Fiorentini e Lorenzato (2006) destacam que "quanto mais próximo do momento da observação for feito o registro, maior será a acuidade da informação" (p. 32).

Em vários momentos, as conversas pessoais com a orientadora, a respeito de nossa coleta e produção de dados registrados no diário de campo, nos auxiliaram a resgatar detalhes. Todas essas estratégias serviam para complementar e detalhar registros iniciais dos acontecimentos de aulas em termos de questionamentos de alunos, diálogos entre alunos e a professora pesquisadora, dúvidas de alunos, diálogos entre os alunos a respeito de tarefas matemáticas, e outros. Fiorentini e Lorenzato (2006) também reforçam a importância do diário de campo e destacam que é

> Um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo é o diário de bordo. É nele que o pesquisador registra observações e fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for feito o registro maior será a acuidade da informação (p.118 e 119).

Assim sendo, esse instrumento nos acompanhou em toda a nossa investigação e com ele foi possível anotar informações e detalhes captados pelo nosso olhar que o registro de gravação ou registro fotográfico não conseguiria perceber totalmente. O diário de campo proporciona anotar os pensamentos, impressões e sentimentos, os planejamentos e os acontecimentos durante a investigação. E é lendo, relendo e analisando esses registros que é possível notar o quanto amadurecemos e evoluímos em nossas observações e análises. Entretanto, apesar de sabermos que o diário de campo não nos garantiu o registro de todos os detalhes, foi um importante recurso que ativou nossa memória de fatos acontecidos ao longo de nossos estudos possibilitando uma retrospectiva da situação real.

3.5.2 - Gravações em áudio

Fizemos uso do gravador de áudio durante a coleta e produção de dados prevendo que não daríamos conta de registrar, em alguns momentos, os fatos ocorridos em sala de aula, simultaneamente. Informamos aos alunos sobre a importância da utilização do gravador e que faríamos o uso deste em todo o período de nossa participação em sala, mas que a identidade deles seria preservada. Importante ressaltar que os alunos nos lembravam de ligar o gravador antes de iniciarmos a aula, agindo com naturalidade ao fato de a aula estar sendo gravada.

O gravador foi utilizado para captar as falas dos alunos durante a aplicação das atividades, e das suas falas individuais para confirmar nossas análises preliminares e, também, a fala da professora titular, enquanto ela administrava a aula, a fala da professora titular ao ocorrer nossa regência e nossa fala enquanto pesquisadora. Todas as gravações foram transcritas na íntegra. Tivemos o cuidado de escutar algumas gravações - mais de uma vez - para as transcrições dos dados o que tomou tempo e foi trabalhoso. Mesmo assim, infelizmente, alguns trechos do áudio ficaram incompreensíveis. Não fizemos uso da gravação em áudio no período de observação porque, como ainda não conhecíamos os participantes da pesquisa, o áudio não nos daria condições de identificar as vozes dos sujeitos. Apesar de os dados transcritos da gravação em áudio serem uma fonte importante de coleta, recorremos também à conversa informal individual, buscando compreender alguns procedimentos dos alunos nas atividades.

3.5.3 – Entrevistas

Realizamos uma entrevista com a professora titular da turma, a fim de compreender o seu processo de formação e o trabalho pedagógico realizado na sala de aula. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), a entrevista trata-se de uma conversa a dois com propósitos bem definidos. Inicialmente, tivemos a intenção de investigar quais impressões, experiências e conhecimentos a professora titular tinha a respeito do tema que seria trabalhado. Os questionamentos inseridos na entrevista fazem parte do APÊNDICE K.

3.5.4 – Conversa informal com os alunos

Durante a análise dos dados, foi preciso desenvolver uma conversa individual com alguns alunos. Esta conversa era informal e usamos como registro o diário de campo e o gravador. Escolhemos a biblioteca como espaço para conversarmos, porque tínhamos a necessidade de que fosse em um ambiente tranquilo sem interferências para não desviar a atenção do aluno. Empregamos esse recurso para confirmar algumas análises dos dados coletados.

3.5.5 – Observação

A observação foi realizada no período de junho/2013 a setembro/2013, totalizando quinze dias letivos. Foi necessário observar as aulas, a fim de conhecermos os sujeitos participantes da pesquisa, desenvolver um elo de convivência e confiança com os alunos e delinear o perfil da turma. Esse recurso nos possibilitou perceber as relações entre aluno-aluno e aluno-professor. As atitudes dos alunos durante as atividades planejadas pela professora titular nos permitiram identificar os alunos que mais dependiam de explicações extras da professora na realização das tarefas e identificar os alunos mais independentes. Durante o período de observação, foi possível criarmos um vínculo de amizade com os alunos, tornando nossa convivência agradável e prazerosa. No período de observação, a professora titular solicitou que auxiliássemos alguns alunos com dificuldades em compreender as atividades por ela propostas. Apresentamos, no final do texto, um quadro com os conteúdos planejados pela professora da turma e trabalhados, antes de iniciarmos o conteúdo de divisão (APÊNDICE D).

3.6 - Detalhamento das atividades desenvolvidas

Desenvolvemos atividades planejadas por nós, no período de setembro a dezembro/2013. Assim, oferecemos ao leitor uma panorâmica dos trabalhos realizados em 2013, em aulas de matemática com a turma da 3ª série/4º ano do ensino fundamental. Dentre as atividades realizadas nas aulas, selecionamos as que nos mostraram maior potencial em responder ao nosso questionamento central: que estratégias e ideias de divisão, alunos de 3ª série/4º ano do ensino fundamental exibem antes do ensino formal, e que estratégias e aprendizagens evidenciam após um experimento de ensino formal de divisão? As atividades que foram selecionadas para responder aos nossos questionamentos e posterior análise serão apresentadas e detalhadas no capítulo IV. Detalhamos no quadro do APÊNDICE L todas as atividades desenvolvidas durante a etapa de aplicação do experimento de ensino.

3.7 – Estratégias para planejamento/implementação e redação do texto final

No decorrer de nossa investigação, em momentos de estudos independentes ou sob orientação de nossa professora orientadora, refletíamos sobre as atividades desenvolvidas, as conversas realizadas com os sujeitos da pesquisa, buscando resgatar na memória as lembranças de acontecimentos e fragmentos que escaparam dos registros realizados no diário de campo. Tivemos diversas orientações para a elaboração do texto com nossa orientadora, por telefone, e-mail, e skype[23] que também ficaram registrados. Utilizamos todos esses recursos, em consonância com os instrumentos de coleta de dados para o direcionamento de nossa pesquisa. Tudo isso foi relevante na organização dos dados e transcrição dos mesmos, durante a interpretação e as análises preliminares e definitivas, bem como na produção do texto final. Todo o procedimento descrito acima foi necessário a fim de nos auxiliar na busca por respostas aos nossos questionamentos (SANTOS-WAGNER, 2013, 2014).

---

[23]**Skype** é um software que permite comunicação pela internet através de conexões de voz sobre IP - VoIP - http://pt.wikipedia.org/wiki/Voz_sobre_IP(Acesso em 13/02/2014.)

CAPÍTULO IV
DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E ANÁLISE DE DADOS

Não sei se a vida é curta ou longa para nós,
mas sei que nada do que vivemos tem sentido,
se não tocarmos o coração das pessoas.
Muitas vezes basta ser colo que acolhe,
braço que envolve, palavra que conforta,
silêncio que respeita, alegria que contagia,
lágrima que corre, olhar que acaricia, desejo que sacia,
amor que promove.
E isso não é coisa de outro mundo, é o que dá sentido à vida.
É o que faz com que ela não seja nem curta, nem longa demais,
mas que seja intensa, verdadeira, pura enquanto durar.
Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.

Cora Coralina[24]

Introdução

Compreender o que foi coletado e produzido neste estudo exigiu de nós um olhar atento sobre os dados (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), buscando responder o questionamento central desta pesquisa: Que estratégias e ideias de divisão alunos de 3ª série/4º ano do ensino fundamental exibem antes de um experimento de ensino formal e quais evidenciam após esse experimento? Neste capítulo, focalizamos dois alunos em alguns episódios de aulas e, em momentos de conversas com eles, durante a pesquisa de campo. Selecionamos esses alunos porque identificamos nas soluções por eles apresentadas indícios de respostas para os nossos questionamentos. Além disso, ter analisado as estratégias desses alunos contribuiu para a nossa compreensão acerca das aprendizagens da operação de divisão. Essa etapa implicou em leitura cuidadosa dos registros escritos e escuta das gravações em áudio para estabelecer relações e compreensões a respeito dos dados, de acordo com as perspectivas teóricas indicadas no capítulo II. A trajetória de aprendizagem de Samanta não foi exatamente

[24] http://pensador.uol.com.br/poemas

igual a de Nicolau. Por isso, nosso olhar se deteve, em alguns momentos, nas atividades diferenciadas realizadas por eles.

Fizemos algumas reflexões e relações sobre as emoções que atravessam e influenciam o processo de aprendizagem, porque acreditamos que estas interferem positiva ou negativamente na aprendizagem do sujeito. Gómez Chacón (2003/2000) afirma que emoções são geradas durante as ações desenvolvidas nas aulas, quer para o professor, quer para o aluno. A definição de emoção a que nos referimos está de acordo com (DAMÁSIO, 2013) que aponta ser “as respostas motoras que o cérebro faz aparecer no corpo em relação a algum evento e que podem gerar aceleração ou desaceleração do batimento do coração, tensão ou relaxamento dos músculos” (p. 1). A emoção, segundo o autor, “quer as positivas quer as negativas, podem ter uma enorme influência naquilo que nós pensamos” (p. 1). Tentamos organizar nossos dados e análise seguindo a orientação de Silva e Santos-Wagner (1999), ao apontarem que

> É o olhar de curiosidade e indagação do investigador acompanhado de sistematicidade, planejamento, avaliação contínua ao longo do processo de pesquisa, coerência no interpretar, analisar e categorizar os dados à luz dos questionamentos da pesquisa que permitem que o processo seja árduo, intenso e muito interessante (p. 21).

Por isso, procurávamos transcrever os dados logo após nossa participação na turma. Socializamos com a professora Suelen nos horários de planejamentos, nossas impressões referentes às aprendizagens dos alunos ou da dinâmica das aulas, das fragilidades e potencialidades das atividades. Notamos que, à medida que fomos interagindo com a professora da turma, mudanças foram acontecendo. A professora Suelen contava que a sua forma de compreensão da divisão tinha se ampliado. Ela se achava uma professora comprometida, mas dizia que, após nosso trabalho, teria maior cuidado com a metodologia. Comentou que seu enfoque com o trabalho de divisão não se restringiria ao ensino do algoritmo e que iria explorar melhor as estratégias de resolução em aulas futuras.

Para termos uma visão das estratégias de solução utilizadas pelos alunos nas tarefas de divisão, aplicamos primeiro uma atividade diagnóstica. Buscamos identificar, independentemente de acertos e erros, as diversas formas de raciocínio, as soluções do tipo convencional (uso do algoritmo) e não convencional (estratégias pessoais).

Após identificarmos as soluções criadas pelos alunos na atividade diagnóstica, em sua maioria representadas por desenhos, trabalhamos com uma sequência de atividades. Consideramos esta sequência de atividades como um experimento de ensino que abordava, novamente, os problemas aplicados na sequência diagnóstica e trazia outras tarefas de divisão.

4.1 - Estratégias da turma

A fim de dar uma panorâmica dos resultados da turma nas soluções dos problemas aplicados durante a etapa diagnóstica, apresentamos por meio de tabelas as estratégias que os alunos usavam antes da mediação. Elaboramos nossas tabelas, seguindo a categorização desenvolvida por Benvenutti (2008), fazendo algumas adaptações conforme as soluções identificadas no contexto de nossa pesquisa. Detalhamos, em nosso estudo, a trajetória de aprendizagem de dois alunos de uma turma com 24 alunos, com idades entre 9 e 11 anos de uma 3ª série/4º ano do ensino fundamental. Para fazermos nossa análise, desagrupamos nossa questão central em duas partes, sendo que, inicialmente, focamos nosso olhar nas estratégias apontadas por Samanta e Nicolau antes de ser trabalhado o conteúdo de divisão. A partir dos resultados evidenciados nas soluções apresentadas pelos alunos, foi possível responder à primeira parte da questão de pesquisa formulada no início de nossa investigação sobre: **que estratégias e ideias de divisão alunos de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental exibem antes de um experimento de ensino formal.** Antes de trazer nossas reflexões a respeito da aprendizagem de Samanta e Nicolau, faremos uma breve consideração dos resultados da turma de modo geral como registrado nas tabelas.

Quadro 4: As estratégias das situações-problema de divisão com a ideia de medida

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS		PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3		
		Certa	Errada	Branco	Certa	Errada	Branco	Certa	Errada	Branco
Algoritmos	Divisão									
	Multiplicação		1		1	1			3	
	Adição	2			1	2		2		
	Subtração	1	1		3	2		1	1	
Desenhos/outras formas não convencionais		9	5		4	3		3	5	
Desenhos e algoritmo de multiplição		1							1	
Desenhos e algoritmo de divisão									1	
Cálculo Mental		4			3			3	1	
TOTAL		**17**	**7**	**1**	**12**	**8**	**5**	**9**	**12**	**5**

Quando aplicamos os problemas 2 e 3 na turma, três alunos não estavam presentes. Identificamos maior predominância de estratégias com algoritmo (adição e subtração) e estratégias de cálculo mental. No enunciado de situações-problema que aborda a ideia de medida ou quantos cabe, o tamanho das quotas já está definido. Quando o aluno percebe essa relação, ele efetua, intuitivamente, a operação de subtrair do todo ou faz agrupamentos com o tamanho das quotas, efetuando a operação de adição. Quanto à estratégia de cálculo mental, sabemos que de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; 1997), é quando mentalmente

> se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos. O cálculo mental apóia-se no fato de que existem diferentes maneiras de calcular e pode-se escolher a que melhor se adapta a uma determinada situação, em função dos números e das operações envolvidas. Assim, cada situação de cálculo constitui-se um problema aberto que pode ser solucionado de diferentes maneiras, recorrendo-se a procedimentos originais para chegar ao resultado. (p.72)

Todavia, neste trabalho, consideramos como estratégia de cálculo mental, por exemplo, a solução para o problema "*Tenho 15 balas e vou entregar 3 balas para cada criança. Quantas crianças participarão da distribuição?"* em que foi explicitada a seguinte resposta sem o registro icônico ou algoritmo, acrescentada a resposta por extenso: "*resolvi usando a tabuada de 3, quando vi uma continha que dava 15 usei o número multiplicador como resultado, então dá 5 balas.*" Apenas um aluno utilizou o algoritmo curto da divisão, considerado por nós como convencional. Mesmo sabendo que, no ano anterior, o conteúdo de divisão não tinha sido trabalhado, verificamos que o livro didático dos alunos contemplava esse tema. É possível que o aluno tenha visto a imagem da conta armada de divisão ou até mesmo tenha aprendido com alguém mais experiente a efetuar o cálculo, usando o algoritmo. Vale salientar que esse aluno não utilizou o algoritmo em outras situações.

Alguns alunos deixaram o problema em branco ou com a solução incompleta. Consideramos, como solução incompleta, o problema que apresentou apenas o cálculo sem o registro da resposta por extenso, porque entendemos que, algumas vezes, um aluno efetua o cálculo no automático, mas não estabelece nenhuma relação com a questão do problema e a resposta encontrada. Nessa etapa, lembramos ao leitor, que não fizemos nenhuma interferência nas escolhas de procedimentos de cálculos dos alunos. Eles foram registrando por escrito, através do desenho, ou de outras formas os seus modos de resolução.

Certo aluno desenhou quinze balas e, em seguida, foi fazendo agrupamentos, circulando de três em três. O problema requeria que se descobrisse a quantidade de crianças participantes da distribuição, sendo que cada uma deveria receber três balas. Em cada grupo de três, ele escreveu a identificação "*1 cri.., 2 cri..., 3 cri..., 4 cri..., 5 cri...*" se referindo a "1 criança, 2 crianças, 3 crianças, 4 crianças e 5 crianças." Feita a distribuição, usando desenhos, o aluno sentiu a necessidade de apresentar uma "conta". Por isso, registrou os números 15 ÷ 3/ 5 na vertical semelhante às representações das demais operações. Consideramos a resposta desse aluno como estratégia combinada de desenho e outras formas não convencionais.

A estratégia de circular de três em três evidenciou para nós que esse aluno compreendeu que para solucionar uma divisão com a ideia de medida, basta fazer agrupamentos com a quantidade invariável (divisor) de cada parte. É possível que esse aluno fosse adicionando, mentalmente, de três em três, à medida que ia circulando as partes que cada criança deveria receber. Entre os alunos que optaram pela estratégia de cálculo mental, alguns usaram material manipulativo para efetuar a contagem e outros fizeram agrupamentos. Nesse caso, é possível inferir que esses alunos já tenham sentido de número desenvolvido, uma vez que precisaram recorrer a esquemas mentais flexíveis para efetuar os cálculos. Notamos, em alguns problemas, a ausência de registro de resolução com apenas a resposta apresentada. É possível que o cálculo efetuado tenha sido de adição já que a ideia de medida aponta uma constante invariável (divisor) que possibilita a soma até chegar a quantidade total de elementos (dividendo).

Nos problemas, envolvendo a ideia de repartir em partes iguais da atividade diagnóstica, os resultados foram os seguintes:

Quadro 5: As estratégias das situações-problema de repartir em partes iguais

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS		PROBLEMA 1			PROBLEMA 2			PROBLEMA 3		
		Certa	Errada	Branco	Certa	Errada	Branco	Certa	Errada	Branco
Algoritmos	Divisão	1								
	Multiplicação	2			2	2		1		
	Adição				1			1		
	Subtração									
Desenhos/outras formas não convencionais		16	3		11	2		7	3	
Desenhos e algoritmo de multiplição								1		
Desenhos e algoritmo de divisão		1							1	
Cálculo Mental		1			1			2		
TOTAL		**21**	**3**	**2**	**15**	**4**	**5**	**12**	**4**	**5**

No problema 2 de repartir em partes iguais, dois alunos não estavam presentes e quando aplicamos o problema 3, cinco alunos não estavam presentes. Nessas situações-problema houve maior predominância de desenhos/outras formas não convencionais utilizadas corretamente. Alguns alunos fizeram uso de material manipulativo para representar a distribuição sobre a mesa e depois realizar o registro no papel. Em casos onde a estratégia foi utilizar o algoritmo de multiplicação, alguns justificaram o resultado após encontrar dois números no qual o produto era igual ao conjunto maior dos elementos que precisavam ser distribuídos.

Citamos o exemplo dos 12 carrinhos para serem distribuídos em três caixinhas. O aluno registrou a seguinte resposta “4 carrinhos em cada caixa porque 3x4=12”. Identificamos nesse tipo de procedimento a compreensão de que a operação de multiplicação é a operação inversa da divisão. Sabemos que, às vezes, alunos efetuam cálculos sem fazer conexão entre o resultado e a questão da situação-problema. Nas soluções que aplicaram o algoritmo de multiplicação e foram categorizadas como corretas, verificamos que foram escritas as respostas da pergunta por extenso demonstrando para nós entendimento da pergunta do problema.

Nas situações-problema que foram apresentadas em branco, sem solução, constatamos que esses alunos não conseguiram solucionar as outras situações corretamente. Entendemos que, com eles, era necessário fazer um retorno a respeito de algumas aprendizagens que não ficaram bem compreendidas. Citamos a necessidade de aprofundar com esses alunos o entendimento de conceito de número, o sistema de numeração decimal e retomar os conteúdos de adição, subtração e multiplicação. Sabemos que valorizar e incentivar a elaboração de estratégias com os alunos, explorando com materiais manipulativos as ações de juntar, somar, acrescentar, diminuir, retirar, repartir antes de aplicar o algoritmo vai contribuir com a construção (ou reconstrução) de conceito de número, além de favorecer a aquisição de habilidades com cálculo mental.

Na atividade de elaboração de problemas de divisão com a ideia de repartir em partes iguais, novamente os alunos demonstraram que experiências em repartir, equitativamente, entre as partes é mais comum para eles em suas vivências. Apresentamos, a seguir, os resultados dos alunos da turma com o conceito de divisão equitativa.

Quadro 6: Resultados dos problemas de divisão elaborados com a ideia de repartir em partes iguais

PROBLEMA 1				PROBLEMA 2				PROBLEMA 3			
Certa	Errada	Branco	Total	Certa	Errada	Branco	Total	Certa	Errada	Branco	Total
16	6	3	25	14	6	4	25	12	6	5	23

No problema 1, tivemos um aluno que apresentou a solução incompleta, duas respostas incompletas apareceram no problema 2 e quatro alunos deixaram a questão em branco. No problema 3 encontramos três respostas incompletas e cinco alunos deixaram em branco. O aluno Nicolau faltou no dia da atividade de elaboração de problemas de repartir em partes iguais. Sugerimos que os alunos usassem os mesmos dados numéricos propostos por nós nos problemas das atividades anteriores e só alterassem a situação-problema. Esclarecemos, sem fazer nenhuma definição e nenhuma explicação extra, que a ideia de divisão deveria ser mantida.

Os resultados encontrados na elaboração de problemas envolvendo a ideia de divisão como medida ou "quantos cabe" também foram apresentados em tabela a fim de podermos comparar e analisar as produções dos alunos da turma.

Quadro 7: Resultados dos problemas de divisão elaborados com a ideia de medida

PROBLEMA 1				PROBLEMA 2				PROBLEMA 3			
Certa	Errada	Branco	Total	Certa	Errada	Branco	Total	Certa	Errada	Branco	Total
4	15	3	22	4	12	5	21	5	10	6	21

No problema 1, com a ideia de medida, apareceram quatro situações incompletas com apenas o enunciado sem a resolução e três alunos apresentaram a questão em branco; no problema 2, coletamos cinco soluções incompletas com os enunciados parcialmente formulados e cinco alunos deixaram em branco sem elaborar nenhuma situação-problema. No problema 3, tivemos seis alunos que não formularam a situação-problema e três alunos deixaram a questão incompleta sem efetuar o cálculo. Dois alunos não fizeram a tarefa porque não estavam presentes. É possível perceber que os alunos tiveram facilidade em criar situações-problema com a ideia de repartir em partes iguais. Maldaner (2011) comenta em seu texto que existem autores (DICKSON; BROWN; GIBSON, 1984)[25] que sugerem começar o trabalho com divisão,

[25] DICKSON, L.; BROWN, M; GIBSON, O. **Children Learning Mathematics.** Londres: Cassel for the Schools Council, 1984.

abordando a ideia de medida, porque acreditam ser mais fácil de serem compreendidos pelas crianças.

Pela nossa experiência pedagógica em sala de aula e os resultados obtidos em nosso estudo, constatamos que a ideia de repartir em partes iguais é mais clara para o aluno. Os autores (FISCHBEIN, DERI e MARINO, 1985 apud SELVA, 1998)[26] confirmam nosso argumento, dizendo que o conteúdo de divisão deve ser iniciado, abordando a ideia de repartir em partes iguais. Esse argumento decorre das observações realizadas com crianças de que o conceito de repartir em partes iguais acontece, naturalmente, em atividades de brincadeiras ou outras ações do dia a dia da criança. Esses autores enfatizam que o professor deve iniciar propondo problemas de partição - onde o tamanho das partes deve ser encontrado - porque envolve a ação de repartir elementos em partes iguais, ação comum do dia a dia das crianças.

4.2 - Caminhos de Samanta na aprendizagem de divisão

Inicialmente, trazemos para o leitor a trajetória de Samanta durante as atividades diagnósticas. Samanta é uma aluna que gosta de ser o centro das atenções. Costuma chamar atenção para si, devido aos conflitos que surgem no relacionamento com os colegas. Além disso, gosta de demonstrar para os colegas que compreende facilmente as atividades. Tem autonomia para resolver as tarefas matemáticas, buscando poucas vezes o auxílio da professora. Nossa intenção é apresentarmos o processo de aprendizagem dessa aluna antes e após um experimento de ensino. Aplicamos, em setembro de 2013, duas atividades diagnósticas de resolução de situações-problema e, em outubro, duas atividades diagnósticas de elaboração de problemas antes do ensino formal do algoritmo. Esclarecemos que o intervalo ocorreu, devido a demanda pedagógica da professora regente em cumprir com outras tarefas escolares na turma, como por exemplo, mostra cultural ou aulas extraclasse ou visita

---

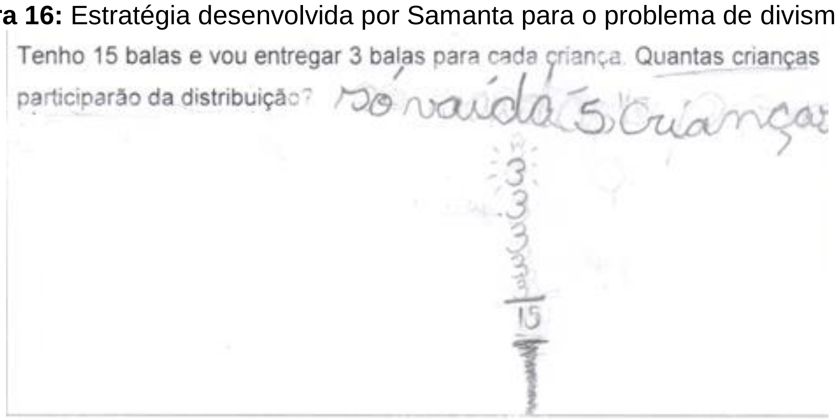
[26] FISCHBEIN, E; DERI, M; MARINO, M. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education** 16, 1985, pp. 3-17.

de autores literários na escola. Como já mencionamos, a primeira aula, realizada no dia 16 de setembro constava de três problemas de divisão com a ideia de medida.

4.2.1 – Samanta resolvendo um problema de divisão com a ideia de medida

Aplicamos a atividade diagnóstica 1, no dia 16 de setembro. Era composta por três situações-problema de divisão com a ideia de medida. A seguir, apresentamos a solução desenvolvida por Samanta, referente ao primeiro problema, envolvendo a ideia de divisão como medida.

Figura 16: Estratégia desenvolvida por Samanta para o problema de divismedida



Notamos a compreensão da aluna no que se refere ao tamanho de cada parte requerida no problema. Samanta compreendeu que criança deveria receber três balas e confirma registrando por extenso a solução. Como vemos na figura 16, observamos que Samanta escolheu e desenvolveu estratégias mais elaboradas, à medida que seguia na compreensão das duas ideias básicas da operação de divisão.

Podemos notar ainda que a aluna já elabora uma estratégia alternativa de divisão, fazendo “adição de parcelas repetidas” (SELVA, 1998, p. 106) sem que, para isso, recorra às representações icônicas. “A divisão por meio de agrupamentos repetidos também é baseada na distributividade” (CARRAHER, CARRAHER e SCHLIEMANN, 1995, p. 154) em que multiplicamos as partes do número por um fator sucessivo e depois somamos os vários produtos. Por exemplo, se pensarmos na questão de efetuar a divisão 424÷4, sem termos que usar o algoritmo de divisão, fazendo a decomposição dos números, a resolução pode se apresentar assim:

$424 \div 4 = (400 : 4) + (20 : 4) + (4 : 4)$

$424 \div 4 = 100 + 5 + 1$

$424 \div 4 = 106$

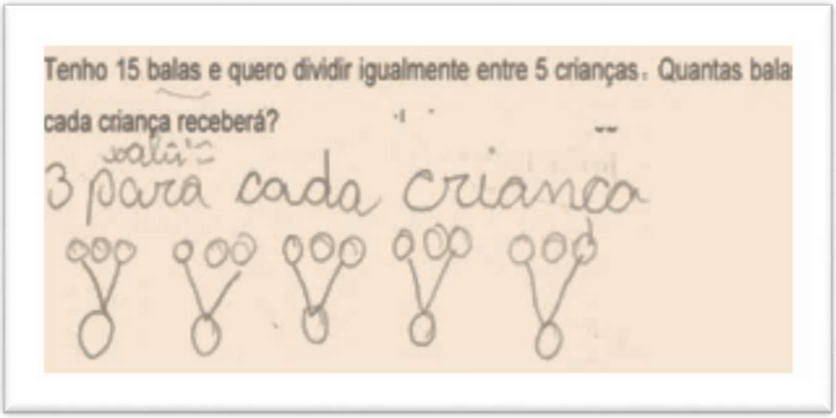
Esta estratégia depende, segundo Carraher, Carraher e Schliemann (1995) do "conhecimento da tabuada de multiplicar, do mesmo modo que o algoritmo escolar" (p. 154).

4.2.2 – Samanta resolvendo um problema de divisão com a ideia de repartir em partes iguais

No dia 17 de setembro, durante uma aula, aplicamos a atividade diagnóstica 2 constituída de situações-problema de divisão com a ideia de repartir em partes iguais. O primeiro problema tinha o seguinte enunciado: "Tenho 15 balas e quero dividir igualmente entre 5 crianças. Quantas balas cada criança receberá?"

Para resolver a tarefa, Samanta modelou a situação-problema, simulando a distribuição com quinze objetos pessoais do estojo escolar organizados sobre a mesa. Samanta separou os elementos necessários para resolver o problema, deslocando três objetos para cada uma das cinco partes. Por ser uma quantidade pequena, ela talvez já conhecesse como repartir e, por isso, não tenha tido dificuldades em visualizar, rapidamente, a quantidade para cada parte. À medida que controlava a distribuição, ela definiu, respondendo que cada criança deveria ficar com três balas. Depois, registrou por escrito sua estratégia com representação icônica em que identificou as cinco crianças com um símbolo e distribuiu três balas de cada vez para cada criança como mostra a figura 17.

Figura 17: Estratégia de Samanta para resolver o problema de divisão de repartir em partes iguais



Ao observar a divisão realizada por Samanta, notamos que a aluna fazia o movimento de retorno à leitura do problema, para desenvolver sua estratégia pessoal. Durante a nossa observação da ação da aluna, verificamos que ela demonstrou compreensão do enunciado do problema, aspecto já enfatizado por Polya (1995/1945). Para resolver um problema, segundo o autor, é preciso compreendê-lo e para isso é fundamental identificar o elemento desconhecido – a pergunta do problema, a situação implicada, os dados fornecidos pelo problema e fazer a relação entre esses dados. Isso ficou evidente no diálogo posterior com Samanta em que ela mostrou também que mobilizou seus conhecimentos informais.

Nesse caso, o conhecimento já existente (VYGOTSKY, 1998/1984) potencializou a capacidade que Samanta já havia manifestado pela representação de seu esquema mental. Segundo Lautert & Spinillo (1999), a "complexidade das representações matemáticas se reflete nas diferentes formas de se conceber as relações entre representação e conhecimento/raciocínio" (p. 24). Então, a representação matemática realizada pela criança em seus registros reflete os processos mentais superiores internos e que constitui a expressão do pensar do sujeito.

4.2.3 – A Interação entre a professora pesquisadora e a aluna Samanta

> P.P.: Explica pra mim como você foi fazendo.
> Aluna Samanta: Fui pegando de três em três porque eu já sabia (*sic*).
> P.P.: E como você já sabia? Você lembrou alguma conta que sua professora ensinou?

> Aluna Samanta: Me lembrei da continha de mais que a minha professora ensinou. Botei quinze balas e fiz separando de três em três porque eu já sabia (*sic*).
> P.P.: Mas você foi separando de três em três? Mostre para mim como fez usando os objetos.

A aluna separou de três em três os objetos. Então notamos que distribuir de três em três já estava definido mentalmente para a aluna. Possivelmente, ela se recordou de adições repetidas com a mesma quantidade, sendo esta a ideia inicial de multiplicação (recordou do 15 como grupos de 3, associando o todo com adições reiteradas de 3 + 3 + 3 + 3 + 3) (ABRANTES, SERRAZINA e OLIVEIRA, 1999). A estratégia escolhida por Samanta pode ser utilizada nas resoluções de problemas de divisão como medida. Ressaltamos que a professora Suelen já havia trabalhado com a turma as ideias de multiplicação. Temos motivos para pensar que Samanta identificou o elemento desconhecido do problema. A aluna desenhou símbolos – cinco bolinhas representando as crianças – conforme explicou e, em seguida, desenhou diretamente, três bolinhas para cada criança representada. De acordo com Lins e Gimenez (1997, p. 65) “raciocinamos melhor se temos imagens visuais”, por isso, o ato de desenhar bolinhas adquire significado e representam quantidades para Samanta.

Uma nova situação foi criada com 20 objetos (tampinhas) em que ela deveria distribuir em quatro partes iguais. Samanta não inicia distribuindo de um em um. Ela age distribuindo dois objetos para três partes e antes mesmo de colocar mais dois objetos para a quarta parte, nota que vários objetos ainda ficarão para ser distribuídos. Então recomeça. Analisa. Percebemos que Samanta insiste em não começar a distribuição um a um. Observamos que alguns alunos quando não conseguem fazer agrupamentos, por exemplo, de 2 em 2; de 5 em 5 ou de 10 em 10, tentam a estratégia de distribuição de um elemento para um grupo e assim sucessivamente. Esta estratégia é conhecida como correspondência biunívoca. Do contrário, ou seja, quando eles compreendem agrupar ou desagrupar quantidades e quando têm ideia de alguns valores e de algumas adições, arriscam em tentativas mesmo que seja por ensaio e erro. Enquanto aguardávamos a pausa feita pela aluna, resolvemos instigá-la:

> P.P.: Você está com dúvida?
> Aluna Samanta: Estou pensando.

Recordamos com ela uma situação que tivemos na sala. Distribuímos um pacote de balas entre os colegas da turma. No pacote não tinha a informação da quantidade de balas e, por isso, a distribuição foi feita, entregando uma bala para cada aluno. Sugerimos que ela fizesse a distribuição do mesmo modo, mas Samanta recusou. Reconhecemos que, ao ficarmos com receio de induzir a aluna na escolha de estratégias, voltamos demais no pensamento e na aprendizagem já conquistada por ela. Equivocamo-nos ao sugerir para Samanta a distribuição de uma bala para cada aluno. Ela demonstrou que desejava fazer agrupamentos com as quantidades que já sabia e realizar cálculos mais econômicos.

Na interação realizada entre nós, notamos nos argumentos de Samanta, autonomia para decidir as próprias estratégias, realizando experimentos e esquemas mentais do jeito escolhido por ela. Logo, salientamos que é fundamental o professor ter a coragem de reconhecer quando sua abordagem não foi bem sucedida, além de respeitar o tempo de aprendizagem de cada um. Samanta prossegue esclarecendo o porquê de sua recusa em aceitar nossa sugestão.

A aluna tem autonomia de raciocínio, pois demonstra saber que a estratégia sugerida por nós apontava um retorno do que ela já tinha aprendido. Dessa forma, distribuindo de três em três e acrescentando mais dois elementos para cada um, Samanta finaliza a distribuição. Embora não tenha descoberto imediatamente o tamanho de cada parte, se satisfaz, colocando logo três elementos, depois mais dois, totalizando cinco elementos. Verificamos que ela dividiu o problema em duas etapas. Não conseguiu de imediato, mas se lembrou de somar 3 e de somar 2. Pensou em como separar a quantidade quinze. Conseguiu mostrar para nós que a solução em duas etapas era melhor que a sugerida por nós de um em um. Finalizamos a nossa mediação com Samanta:

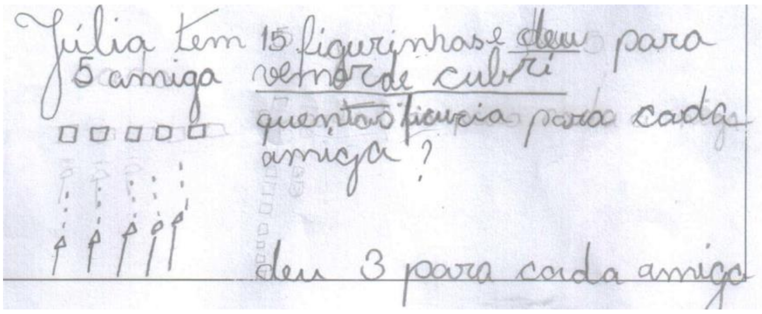
> P.P.: Como podemos ter certeza que vão ser cinco pra cada um?
> Aluna Samanta: É porque se conta tudo vai dar vinte. (*sic)*
> P.P.: Mas é porque sabemos que tem vinte. Que outra maneira tem de provar?
> Aluna Samanta: Ali na tabuada diz que o 5 x 4 vai dá 20.

Temos indícios que Samanta compreendeu a divisão em partes iguais, pois percebemos que, ao finalizar a distribuição, todas as partes estavam com a mesma quantidade. Contudo, foi importante o diálogo que desenvolvemos com Samanta por trazer luz sobre sua ação para nós. Ela demonstrou ter conhecimento da relação entre a divisão e a multiplicação. Provocar o diálogo com Samanta numa abordagem retrospectiva, a fim de verificar o conhecimento real da aluna, nos remete à psicologia sócio-histórica em que o professor, mais experiente, estimula o aluno a analisar suas soluções e a discuti-las, a fim de que, no diálogo com o outro, construa o seu ponto de regulação para um pensar competente, reflexivo e autônomo (VYGOTSKY, 1998/1984).

4.2.4 – Problema de divisão criado por Samanta com a ideia de repartir em partes iguais

A atividade diagnóstica 3 foi aplicada no dia 1 de outubro, numa aula de 50 minutos. Propusemos aos alunos que criassem situações-problema, envolvendo a ideia de distribuir em partes iguais, semelhantes aos problemas aplicados anteriormente. A aluna Samanta produziu uma situação com quinze figurinhas que precisavam ser distribuídas entre cinco amigas. Cabe notar que a aluna representou as amigas com setas e as figurinhas com representação icônica.

Figura 18: Situação-problema com a ideia de divisão como repartir em partes iguais criada por Samanta

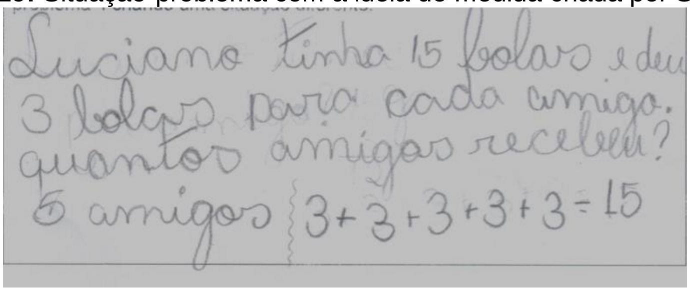


Ela nos explicou que foi fácil resolver porque ia distribuindo uma figurinha de cada vez, representada por um tracinho, para cada amiga. O resultado foram três figurinhas para cada amiga. Fizemos um contraponto nesta situação com a estratégia de Samanta apresentada no problema anterior em que ela recusou em distribuir de um a um. Neste problema, a aluna não considera um retrocesso fazer a distribuição de uma figura de cada vez. Ela usa uma estratégia de correspondência termo a termo. A estratégia que Samanta desenvolveu revela sua organização dos dados do problema e seu domínio em distribuir uma figurinha de cada vez, efetuando o cálculo por contagem. É possível, que a aluna tenha escolhido essa estratégia porque possibilitou que, além de visualizar o próprio procedimento de repartir em partes iguais, favoreceu ter o controle sobre o resultado da questão do problema. Além disso, ela já trabalhou com essa quantidade no primeiro problema da atividade diagnóstica. Compreendemos que a abordagem, envolvendo a língua portuguesa no que se refere à ortografia não poderia ser deixada à parte. Por isso, fizemos algumas intervenções, explorando as questões de escritas e de concordância dentro da língua materna.

4.2.5 – Problema criado por Samanta com a ideia de divisão como

A atividade diagnóstica 4 foi realizada no dia 04 de outubro e consistiu em criar situações-problema, envolvendo a ideia de divisão como medida. Samanta adotou a estratégia de parcelas repetidas de adição com agrupamentos de três em três.

Figura 19: Situação-problema com a ideia de medida criada por Samanta



Ela nos afirmou que sua conta estava certa porque “sabia que 5 x 3 dava 15”. No entanto, observamos que a aluna utilizou o procedimento de adição de parcelas iguais em seu registro expressando na oralidade que tem compreensão, que isso é uma ideia da multiplicação. Isso ficou evidente pela explicação de Samanta ao afirmar que sabia operar com 5 x 3. Notamos que Samanta construiu a relação inversa da divisão, associando com a multiplicação os fatos da situação-problema. É possível estabelecer relações entre a multiplicação e a divisão, quando esta última é exata.

Quando a divisão é inexata ou com resto não nulo, ela se relaciona com a multiplicação e a adição. O NCTM[27] (2007) dentro do eixo Números e Operações aponta uma das metas que se refere a "identificar e usar as relações entre as operações, tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas" (p. 148). A relação entre estas duas operações e a sua aplicação em situações de cálculo potencializa o conhecimento que os alunos têm sobre a multiplicação. Assim, após termos finalizado a aplicação das atividades diagnósticas, exploramos no quadro com a turma toda as estratégias registradas pelos alunos e mostramos algumas reflexões, questionamentos e conjecturas. Tínhamos a intenção de abordar estratégias variadas possíveis na resolução dos problemas propostos e estabelecer relações com as outras operações de cálculo.

4.2.6 - Estratégias da turma e de Samanta para resolver uma conta de divisão pelo algoritmo por subtrações sucessivas

Escolhemos a atividade de ensino 3, realizada no dia 11 de outubro de 2013 para trazermos detalhes sobre a aprendizagem de Samanta, durante o ensino de divisão na turma. Esta aula foi planejada com o objetivo de levar os alunos a compreenderem o algoritmo de divisão, por meio de subtrações sucessivas. O processo das subtrações sucessivas é uma opção para se efetuar a divisão e tem como ponto de partida a relação que existe entre subtração e divisão. Salientamos que esse processo favorece a compreensão do aluno de que o resto de uma divisão nunca pode ser igual ou maior que o divisor, pois, caso contrário, ainda seria possível fazer mais uma subtração.

Pretendíamos mostrar aos alunos a possibilidade de construção de caminhos alternativos de uma mesma situação de divisão usando o método das subtrações sucessivas. Nossa hipótese era a de que, durante a situação de aprendizagem oferecida, a turma avançaria para além do algoritmo. Desejávamos que os alunos compreendessem o conceito de divisão envolvendo as ideias de "repartir em partes

---

[27]NCTM. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.** Lisboa: APM, 2007 (Tradução portuguesa do documento americano).

iguais e de medida", a fim de favorecer escolhas de estratégias mais elaboradas para resolver problemas. A avaliação da aula consistia em verificar se a aprendizagem do processo de divisão pelo algoritmo por subtrações sucessivas de fato ocorreria. Verificamos também se haveria utilização de estratégias cognitivas não ensinadas. Nessa aula, foi explicado aos alunos que algoritmo[28] é uma sequência finita e ordenada de passos (regras), que permite a realização de uma tarefa, como resolução de problemas, cálculos, receitas culinárias, o mesmo trajeto de casa à escola, etc. Miguel e Miorin (1986) apontam que iniciar a técnica da divisão pelo algoritmo por subtrações sucessivas, relacionando as etapas desse procedimento com as tabuadas e com o cálculo por estimativa, tem a vantagem de introduzir a técnica em estreita relação com as ideias da divisão e com o significado do resto.

Iniciamos a aula, esclarecendo aos alunos que iríamos aprender outra maneira de resolver um cálculo, envolvendo a divisão. Acrescentamos que faríamos cada passo juntos e que, em algum momento, alguém deveria explicar com suas próprias palavras o que entendeu para os outros colegas. Então, escrevemos no quadro o algoritmo:

Figura 20: Algoritmo de divisão

$$24\ \left|\underline{\ 3\ \ }\right.$$

Fizemos a leitura à medida que ia escrevendo no quadro: duas dezenas divididas por três, quatro unidades divididas por três. Durante a explicação, alguns questionamentos foram elaborados com o propósito de que os alunos interagissem, enquanto o assunto estava sendo abordado. As indagações, segundo Polya (1995/1945), fazem sentido e podem auxiliar o aluno a resolver o problema e a desenvolver a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio. Alguns questionamentos foram feitos aos alunos durante a abordagem do algoritmo de

---

[28]Trata-se de uma palavra latinizada, derivada do nome de Al Khowarizmi, matemático árabe do século IX, autor do primeiro livro sobre Aritmética. O algoritmo surgiu da necessidade de fazer cálculos sem o auxílio de ábacos, dedos e outros recursos. Até então, a estrutura dos cálculos estava associada às ferramentas que havia à mão: pedras sobre o chão, varetas de bambu, a calculadora de manivela, a régua de cálculo e, por fim, a calculadora. (Definição de Antônio José Lopes, disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/algoritmo-611956.shtml). Acesso em: 18 dez. 2013.

divisão. Esses questionamentos foram adaptados do livro do Pró-letramento (BRASIL, 2007, p. 21):

Figura 21: Abordagem durante explicação do algoritmo pelas subtrações sucessivas

1. Quantas vezes é possível tirar grupos de três elementos dentro de vinte e quatro?
2. Como descobrimos quantos objetos retiramos, se nós retiramos uma vez um conjunto? Quantos objetos tiramos?
3. O que devemos fazer para saber quantos objetos restaram? Podemos continuar tirando 3 de 24, agora que temos 21 objetos?
4. Agora que não podemos tirar nenhum grupo de 3, quantas vezes tiramos um conjunto de três de dentro do 24? Que operação nós devemos fazer para calcular o número total de vezes em que tiramos grupos de 3, de 24?

Fizemos esses questionamentos, a fim de provocar nos alunos uma reflexão, problematização, enquanto o algoritmo era desenvolvido.

Figura 22: Diálogo (1) entre a professora pesquisadora e os alunos

P.P.: Nós vamos fazer juntos aqui na frente e depois vou pedir a alguém que explique com suas próprias palavras, por isso, preciso que todos prestem atenção e participem. Gostaria também que ninguém neste momento anotasse nada.
Vamos escrever aqui no quadro 24 dividido por três, ou seja, duas dezenas e quatro unidades. Pra não esquecermos, vamos colocar as iniciais de dezena e unidade. Acima do algarismo dois vamos colocar a letra inicial das dezenas “D” e acima do algarismo quatro a inicial das unidades “U”. E no lugar do resultado também vamos registrar a letra “D” de dezena e a letra “U” de unidade. O lugar do resultado tem um nome diferente também, se chama quociente que significa quantas vezes, ou seja, quantas vezes o três cabe dentro de vinte e quatro.
P.P.: 2 dezenas e 4 unidades → duas dezenas e quatro unidades. Quanto vale duas dezenas?
Alunos: Vinte.
P.P.: E quatro unidades?
Aluno Nicolau: Quarenta.
P.P.: Quarenta? O que representam as dezenas no material dourado?
Alunos: As barrinhas.

Registramos cada uma das vezes que era retirado um conjunto de três elementos, fazendo perguntas relacionadas à ação sobre os objetos e o registro. Procuramos usar o material dourado para ajudar Nicolau e os outros a se lembrarem o que representaria dezenas e unidades.

Figura 23: Diálogo (2) entre a professora pesquisadora e os alunos

P.P.: E as unidades, qual material que representa?
Alunos: Cubinho.
P.P.: Quantas vezes três cabem dentro de vinte e quatro? Vou melhorar, quantas vezes um pacote com três figurinhas cabe dentro de um pacote com vinte e quatro figurinhas? Quantos pacotes, com três figurinhas dentro, dá para fazer com vinte e quatro figurinhas?
Aluno Luca: Oito.
P.P.: Mas você já foi direto no oito. Como você prova pra nós que o três cabe oito vezes dentro de vinte e quatro.
Aluno Luca: Eu somei.
P.P.: Explica pra gente como você fez?
Aluno Luca: Eu somei de três em três: 3 + 3 = 6, 6 + 3 = 9, 9 + 3 = 12, 12 + 3 = 15, 15 + 3 = 18, 18 + 3 = 21, 21 + 3 = 24
P.P.: É um jeito certo de fazer?

Alunos: Sim.
P.P.: Mas e se eu não soubesse que o três cabe oito vezes dentro de vinte e quatro, poderia começar de outro jeito?
Aluno: Poderia dizer que o três cabe duas vezes.
P.P.: Então eu vou registrar no quadro este outro algoritmo:

```
DU |
24 |__3___
     D U
       2
```

Durante o manuseio do material dourado, alguns alunos revelaram familiaridade com o uso desse material. Observamos também que a preferência de alguns alunos na resolução da divisão é por meio de adição de parcelas repetidas. Verificamos que para proceder na contagem, alguns alunos escolheram agrupamentos e outros preferiram desenvolver a solução com estratégias icônicas.

Figura 24: Diálogo (3) entre a professora pesquisadora e os alunos

P.P.: Se o três cabe duas vezes dentro de vinte e quatro, precisamos saber quanto sobrou. Se vamos tirar dois sacos com três figurinhas de dentro de vinte e quatro, então, precisamos saber quanto sobrou no grupo de vinte e quatro figurinhas. Quantas figurinhas tiramos?
Alunos: Seis.
P.P.: E quanto é 2 x 3?
Alunos: Seis também.
P.P.: Então podemos ir organizando assim: dentro de quatro unidades não dá para subtrair seis unidades, então precisamos fazer uma troca e passar uma dezena para as unidades. Passando uma dezena para somar com quatro unidades ficam quanto?
Alunos: Catorze unidades
P.P.: E duas dezenas passam a ser?
Alunos: Uma dezena só.

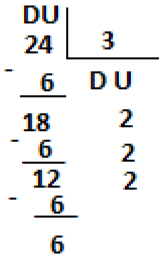
```
  DU |
  24 |__3___
-  6   D U
 ---
  18     2
```

P.P.: Quantas vezes o três vai caber dentro de dezoito?
Alunos: Duas vezes cabe.

P.P.: Prosseguindo. Já sabemos quanto fica dois saquinhos com três unidades dentro, então 2 x 3?
Alunos: Seis.

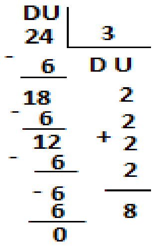
```
  DU |
  24 |__3___
-  6   D U
 ---
  18     2
-  6     2
 ---
  12
```

P.P.: E quanto o três cabe dentro de doze?
Alunos: Duas vezes.



P.P.: E por fim, quantas vezes o três cabe dentro do seis?
Alunos: Duas vezes.

Registramos o algarismo dois no algoritmo e, em seguida, perguntamos quantas unidades eram duas vezes o número três. Os alunos responderam corretamente e, então, completamos, dizendo que precisávamos saber quanto ainda sobraria de “vinte e quatro”, após termos tirado seis elementos. Por isso, registramos o seis no espaço da subtração, sobrando dezoito unidades. Prosseguimos a divisão com o dois no quociente novamente que, após ser multiplicado por três foi subtraído de dezoito, restando doze unidades. Fizemos todo o algoritmo, registrando sempre o grupo de três que cabia duas vezes. Finalizamos, somando os números dois registrados no quociente, chegando ao resultado oito. O algoritmo foi organizado da seguinte forma:



P.P.: Tem mais quantidade para dividir por três?
Alunos: Não.

Feita a divisão, questionamos se a divisão só tinha uma maneira de fazer. Nossa intenção era levar os alunos a perceberem que o número vinte e quatro dividido por três não resultaria sempre em 2 + 2 + 2 + 2, para que eles não se limitassem a resolver somente de um jeito. Queríamos que pensassem que havia outras maneiras de se calcular. Indagamos se era possível o grupo com três elementos caber quatro vezes ou cinco vezes ou dez vezes dentro de vinte e quatro. Os alunos pediram para tentarmos e se não desse certo era só apagar. Reiniciamos o algoritmo, registrando no quociente o número quatro. Em seguida, prosseguimos assim:

Figura 25: Diálogo (4) entre a professora pesquisadora e os alunos

P.P.: Agora nós vamos precisar verificar os resultados parciais que estão registrados no quociente. O que podemos fazer?
Aluno Luca: Três cabe oito vezes dentro de vinte e quatro.
Alunos: Temos que somar.
P.P.: Então vamos lá: 2+2+2+2=8
P.P.: O que é o oito?
Aluno Luca: É o resultado.
P.P.: Sim, mas o que significa?
Aluna Bianca: É o quociente.
P.P.: O oito é o número de vezes que o três cabe dentro de vinte e quatro, em outras palavras, o oito é a quantidade de vezes que o três cabe dentro de vinte e quatro. Quem poderia provar que é um jeito certo de fazer?
Aluno Ewaldo: Porque 8x3=24.
P.P.: Todos entenderam como o colega Luca, de que cabem oito vezes o grupo com três elementos dentro de vinte e quatro unidades?
Aluna Lilian: Eu não entendi.
P.P.: Então, nós precisamos começar com uma quantidade menor para que todos os colegas possam acompanhar a divisão que está sendo feita. Pode ser? Primeiro, nós precisamos aprender o lugar na chave da divisão, onde vamos registrar o resultado da conta.

Sem nomear o dividendo e o divisor, escrevemos a palavra quociente, marcamos o local do resultado no algoritmo e explicamos que o quociente é o mesmo que “quantas vezes” e que é considerado o resultado da divisão. Feito isso, tudo que tinha sido feito até ali foi apagado e questionamos quem gostaria de explicar aquela primeira parte. A aluna Juliana se manifestou, colocando as ordens dezena e unidade acima de vinte e quatro. Em seguida, marcou com um X o espaço onde deveria ser registrado o resultado da divisão. Neste momento, perguntamos aos alunos como é conhecido o espaço em que deveria ser registrado o resultado e os mesmos responderam “quociente”.

Evitamos relacionar a quantidade vinte e quatro com objetos, porque queríamos estimular os alunos a abstrair apenas a quantidade, independente de imaginar uma situação com laranjas ou canetinhas ou balas. Nosso objetivo era trabalhar o procedimento em resolver a conta pelo método das subtrações sucessivas, então, apenas desenhamos ao iniciar, um conjunto com três elementos. Entretanto, ao dialogar com os alunos, em alguns momentos referimo-nos a alguns objetos para ir ajudando-os a compreender os procedimentos.

Figura 26: Diálogo (5) entre a professora pesquisadora e os alunos

P.P.: Vamos tentar resolver vinte e quatro dividido por três de outro jeito?
Aluno Ewaldo: Quantas vezes o três cabe dentro de vinte e quatro?
Aluna Liliane: Dá para ser o quatro.
P.P.: Então, vamos tentar o quatro. A colega de vocês está dizendo que cabem quatro sacos com 3 borrachas dentro de vinte e quatro borrachas.
P.P.: E quanto é 4 x 3?
Alunos: 12.

P.P.: Vou falar uma coisa pra vocês, decorar a tabuada é prática. Não adianta vocês ficarem decorando a tabuada sem resolver contas, sem fazer cálculo mental, quanto mais você resolver cálculos mais você pega intimidade com ela. Nós iremos planejar uma aula só para trabalhar a tabuada que vocês ganharam da professora Suelen. E daí, o que fazemos com o doze?
Alunos: Diminui de 24.

$$\begin{array}{r|l} \text{DU} & \\ 24 & \underline{\;3\;\;\;\;} \\ -\underline{12} & \text{D U} \\ 12 & \;\;4 \end{array}$$

P.P.: E agora, quantas vezes o três cabe dentro do doze?
Alunos: Três.
P.P.: E 3 x 3?
Alunos: Nove.

$$\begin{array}{r|l} \text{DU} & \\ 24 & \underline{\;3\;\;\;\;} \\ -\underline{12} & \text{D U} \\ 12 & \;\;4 \\ -\underline{9} & \;\;3 \\ 3 & \end{array}$$

P.P.: Agora três dividido por três?

$$\begin{array}{r|l} \text{DU} & \\ 24 & \underline{\;3\;\;\;\;} \\ -\underline{12} & \text{D U} \\ 12 & \;\;4 \\ -\underline{9} & +3 \\ 3 & \;\;\underline{1} \\ -\underline{3} & \;\;8 \\ 0 & \end{array}$$

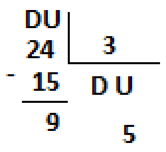
P.P.: E o que falta fazer com os resultados parciais?
Alunos: Somar.
P.P.: Então fica 4 + 3 =7, 7 + 1 =8.

Importante observar que, no momento em que foi perguntado aos alunos quantas vezes o três caberia dentro de três, o aluno Caio respondeu um para cada. O aluno entendeu que três elementos distribuídos em três partes seria um elemento para cada parte.

Figura 27: Diálogo (6) entre a professora pesquisadora, a professora Suelen e a turma

Professora Suelen: Adorei. Fizemos de maneiras diferentes e deu o mesmo resultado.
P.P.: Vamos fazer mais uma vez diferente.
Aluna: Coloca dez.
P.P.: Será que cabe dez vezes?
Alunos: Não.
P.P.: Por que não cabe?
Aluna: Porque 10 x 3 dá 30.
P.P.: E dá para tirar trinta de vinte e quatro?
Alunos: Não.
Aluno Rafael: Tia, dá para colocar o cinco.
P.P.: Ok. E o que fazemos com o três e o cinco?
Alunos: Multiplica.
P.P.: Precisamos fazer algumas trocas. O que temos que fazer?

Alunos: Pega emprestado.
P.P.: Quem pega emprestado tem que devolver.
Alunos: Faz troca, passa uma dezena para a unidade.
P.P.: Agora sim, então são catorze menos cinco.
P.P.: Como vamos prosseguir?
Alunos: Cabe duas vezes.
P.P.: E quanto fica 2 x 3?
Alunos: Seis.
P.P.: E agora?
Alunos: Diminui. Dá 3.



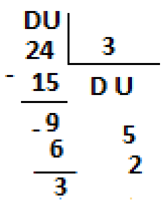
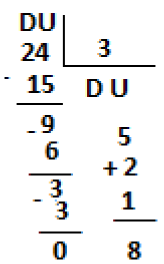
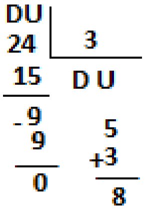


Figura 28: Diálogo (7) entre a professora pesquisadora e a turma

P.P.: O três poderia caber três vezes?
Alunos: Poderia.
P.P.: E quatro vezes?
Aluna Vívian: Não, ia ficar faltando.
P.P.: Até poderia, mas ia ficar negativo, é como se a gente fosse à padaria comprar pão e ficasse faltando dinheiro, ia ficar devendo, saldo negativo. Por exemplo, com 5 reais na carteira e a conta do pão deu sete reais. Quanto ia ficar devendo?
Alunos: Dois reais.
P.P.: Isso mesmo, 5 – 7= -2
P.P.: E para terminar, quantas vezes o três cabe dentro do três?
Alunos: Uma vez.



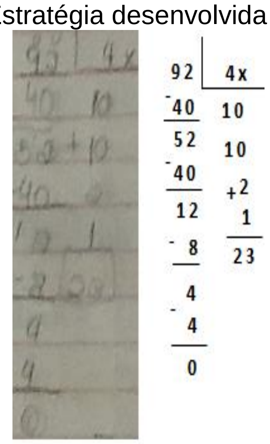
P.P.: Olhando para este último algoritmo, somos capazes de fazer mais um? Vamos.



P.P.: Vou dar oportunidade agora para vocês tentarem resolver a divisão 92 ÷ 4. Quantas vezes o “4” cabe dentro de “92”?
Aluno: Tia, eu vou fazer bolinha.
P.P.: Quantas bolinhas você vai precisar fazer?
Aluno Caio: Um monte, noventa...noventa e dois.
P.P.: Você tem certeza que vai gastar tempo, desenhando noventa e duas bolinhas?
Aluno Caio: Ah, é mais fácil.
P.P.: Mas eu gostaria que você tentasse fazer, usando o algoritmo que nós aprendemos agora. Se você não conseguir, eu lhe ajudo, mas é importante que pelo menos tente.

Caminhando pela sala, observamos os alunos que já haviam conseguido efetuar a conta de forma correta, todavia diferente uns dos outros. Por isso, pedimos para que estes mostrassem para os colegas que já tinham terminado o modo de resolver de cada um. Alguns alunos sentiram-se à vontade em demonstrar para os colegas no quadro, a estratégia que fizeram.

Figura 29: Estratégia desenvolvida por Samanta

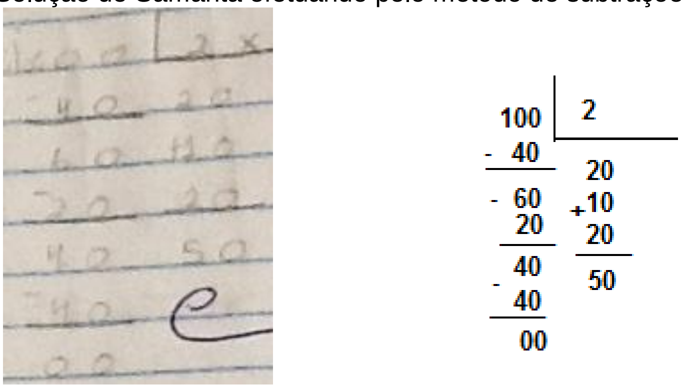


Após a exploração do algoritmo com diferentes estratégias demonstradas no quadro por alguns alunos, aplicamos duas atividades para serem feitas em casa. Contudo não pretendemos explorá-las em nossa análise. Chamamos a atenção dos alunos sobre as operações que estavam envolvidas na divisão: adição, subtração, multiplicação e a própria divisão. Propusemos à turma que criassem duas contas de dividir por 2 e duas contas de dividir por 3.

Samanta elaborou a conta 100 ÷ 2. Temos indício de que Samanta fazia contagens com agrupamentos com facilidade. Notamos que ela demonstrou noções a respeito da grandeza do dividendo, registrando no quociente números maiores que 10.

Demonstrou compreensão no processo de desenvolvimento do método, somando os quocientes parciais para encontrar o resultado. Reconhecemos que a aluna compreendeu as relações entre as operações que permeiam o método das subtrações sucessivas, mostrando que tinha habilidades em efetuar as operações de multiplicação, divisão e subtração.

Figura 30: Solução de Samanta efetuando pelo método de subtrações sucessivas



Esse processo, segundo Toledo & Toledo (1997, p. 156) está relacionado à ideia “de repartir igualmente”. Inicialmente o aluno pode distribuir um a um até perceber que não é mais possível. Aos poucos, vai desenvolvendo a habilidade com a estimativa e para economizar tempo pode passar a distribuir mais de um elemento de cada vez. Toledo & Toledo (1997) sugerem utilizar esse método em situações que o divisor é um número maior que 10. De acordo com os autores,

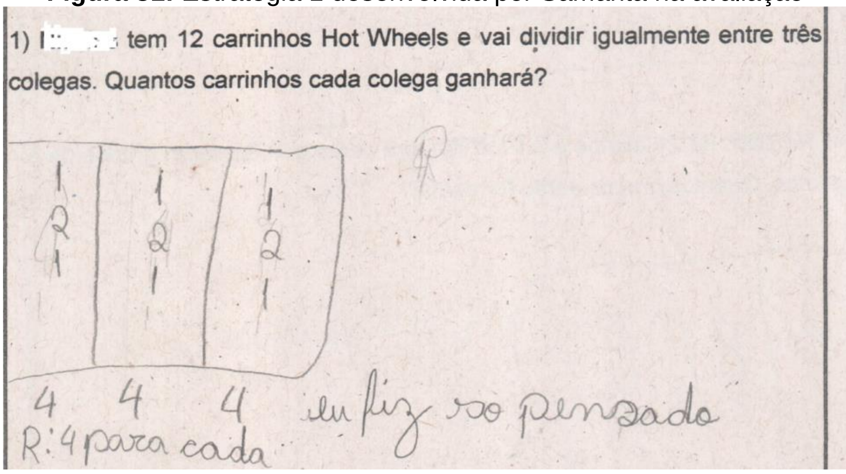
> esse processo, no seu limite, chega ao processo euclidiano. Por tentativas, coloca-se qualquer número no quociente (quociente parcial) e, se o resto permitir, faz-se nova distribuição, ou seja, define-se um novo total no quociente, continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 159).

4.2.7 – Estratégias de Samanta realizadas na avaliação de matemática

Suelen, a professora titular da turma, planejou uma atividade avaliativa aplicada em 4 de novembro com situações-problema de divisão, com o objetivo de identificar a compreensão dos alunos, a respeito do conteúdo trabalhado até ali. Consideramos essa atividade em nossa análise, como sendo a atividade de ensino 4. Para realização da avaliação, a professora Suelen esclareceu à turma que consideraria qualquer estratégia desenvolvida por eles, desde que conseguissem efetuar o cálculo corretamente, solucionando o problema. No problema 1 da avaliação, Samanta registrou a seguinte solução:

a) Problema 1

Figura 31: Estratégia 1 desenvolvida por Samanta na avaliação

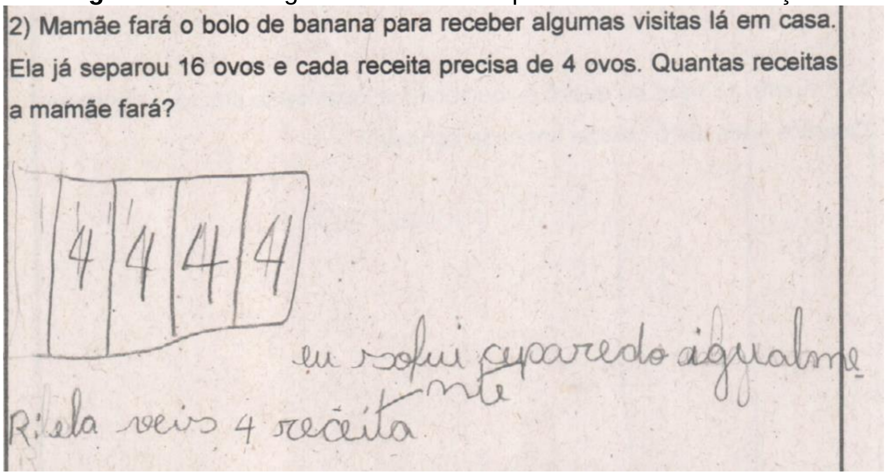


Identificamos que Samanta escolhe uma das estratégias ensinadas por nós, na resolução de situações-problema envolvendo a ideia de divisão em partes iguais. Compreende a quantidade de partes que deveriam receber cada colega. Notamos que Samanta entendeu a pergunta do problema porque além de separar em 3 partes, representando os colegas, ela registra em sua resposta (4 para cada). Utiliza a ação de juntar os resultados parciais, efetuando a adição. Percebemos que Samanta compreende que o fato de não ter realizado nenhuma "conta" significa que fez o cálculo mental. A aluna demonstra que compreendeu o processo de repartir em partes iguais.

b) Problema 2

Para o problema 2, envolvendo a ideia de divisão como medida, a aluna escolheu uma estratégia de solução do campo aditivo, conseguindo solucionar corretamente o cálculo.

Figura 32: Estratégia 2 desenvolvida por Samanta na avaliação


2) Mamãe fará o bolo de banana para receber algumas visitas lá em casa. Ela já separou 16 ovos e cada receita precisa de 4 ovos. Quantas receitas a mamãe fará?

4 4 4 4

eu rsolui separedo aigualmente

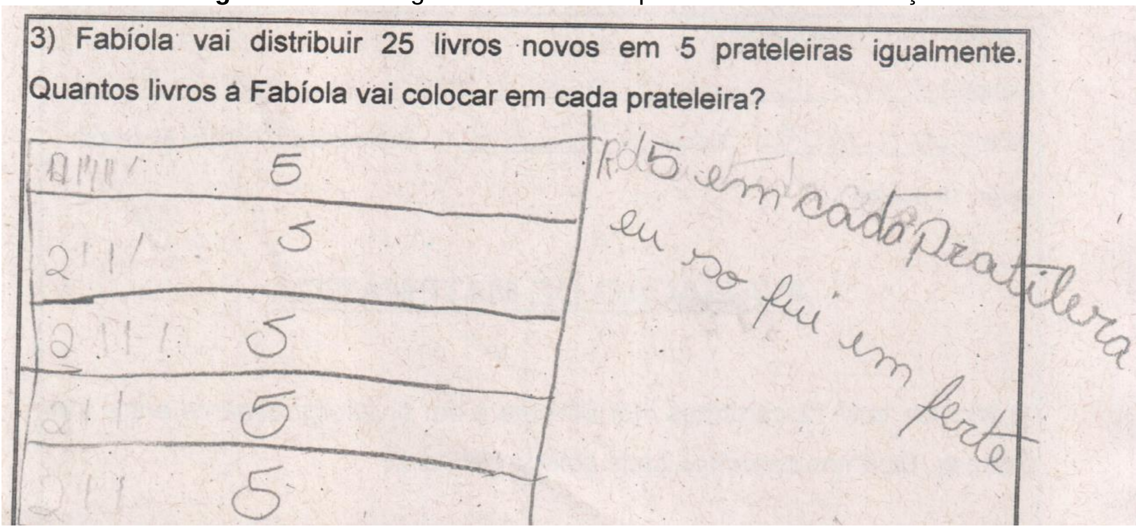
R: ela veis 4 receita

Nesse problema, podemos notar que Samanta separa em quatro partes a quantidade de receitas, possíveis de se fazer com 16 ovos. Acreditamos que a aluna utilizou o procedimento de ir adicionando a quantidade até esgotar e chegar a quantidade total (dividendo). Ela nos mostrou que identificou a pergunta do problema, registrando em sua resposta a quantidade de receitas que poderiam ser feitas com o total de ovos disponíveis. Também é possível que Samanta tenha recorrido à tabuada de multiplicação exposta na sala de aula e separado, diretamente, com 4 ovos em quatro partes. Percebemos que não era comum o aluno verbalizar seu próprio procedimento e explicar como conseguiu resolver a tarefa e talvez por isso, Samanta economizou com as palavras na explicação de seu procedimento. Notamos semelhança entre os procedimentos realizados por Samanta nas duas situações-problema. Contudo, ela identifica o tamanho de cada parte e efetua o procedimento de quantas vezes é possível somar 4, até chegar a 16.

d) Problema 3

Samanta representa as prateleiras, a fim de realizar sua contagem e resolver este problema de divisão com a ideia de repartir em partes iguais.

Figura 33: Estratégia 3 desenvolvida por Samanta na avaliação

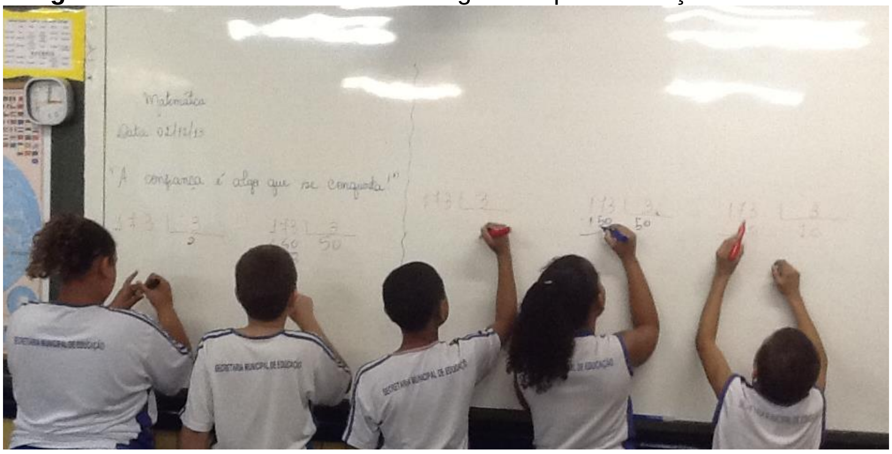


Samanta desenha o divisor (5 prateleiras), inicialmente. Antes de registrar o cinco em cada prateleira, registra a quantidade dois para cada uma delas e acrescenta mais três risquinhos após o dois. Possivelmente, fez a contagem e confirmou que distribuiu os 25 livros nas cinco prateleiras até esgotar. Apaga e registra a quantidade cinco em cada prateleira. Acreditamos que a aluna desenvolve, mentalmente um esquema de adição até resultar no todo (dividendo). Demonstra ter feito relações entre a pergunta do problema e as variáveis numéricas da situação, registrando corretamente a resposta.

4.2.8 – Desempenho de Samanta na resolução do algoritmo de divisão por subtrações sucessivas

Escolhemos a atividade de ensino 4 que foi desenvolvida, em 25 de novembro, a fim de analisar os procedimentos realizados por Samanta com o algoritmo por subtrações sucessivas. A atividade teve a duração de duas aulas, porque alguns alunos foram ao quadro desenvolver o procedimento. Foi colocada na lousa a divisão de 173 ÷ 3 e pedimos que o cálculo fosse desenvolvido pelo método das subtrações sucessivas. Passado um tempo de 20 minutos, pedimos que cinco alunos apresentassem suas estratégias no quadro, com a condição de não repetirem as estimativas dos demais colegas.

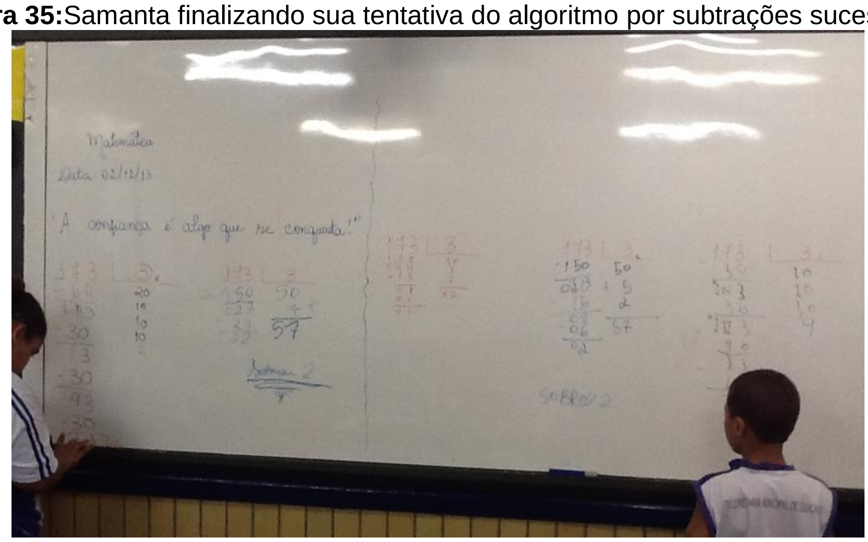
Figura 34: Alunos desenvolvendo algoritmo por subtrações sucessivas



Durante o desenvolvimento do planejamento da aula, pudemos observar alguns detalhes do desempenho de Samanta. Notamos que ela permaneceu no quadro, após os colegas terem finalizado, como mostra a figura 35, porque apagou sua própria estratégia, para então recomeçar. É natural que dúvidas se manifestem, quando enfrentamos conflitos cognitivos em algumas situações. É o início da reflexão (DEWEY, 1979), exatamente, porque sentimos a interrupção da atividade que nos propusemos solucionar e não sabemos como continuar.

Samanta demonstrou relutância em desenvolver o algoritmo e perguntou se poderia usar o próprio caderno onde já se encontrava a tarefa resolvida. Incentivamos que ela poderia conseguir resolver o algoritmo novamente, porque já havia resolvido no caderno. Ela notou que nenhum dos colegas estava utilizando os cadernos e aceitou nosso argumento.

Figura 35: Samanta finalizando sua tentativa do algoritmo por subtrações sucessivas

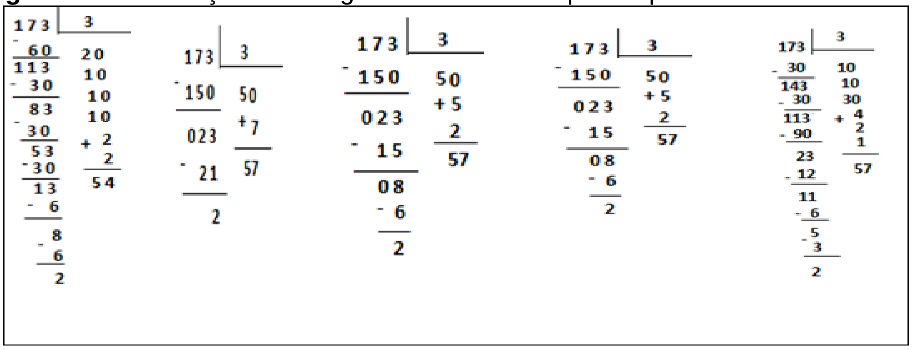


Samanta iniciou fazendo a estimativa de que o número “3” cabe duas vezes dentro do número “173”. Essa estratégia da aluna mostrou seu conhecimento de inclusão hierárquica, isto é, o número 6 está dentro do número 173, que confirma a sua compreensão de conceito de número, segundo Kamii (1984). Apoiou-se na contagem dos dedos para efetuar o cálculo de multiplicação. Ao constatar o resultado 6, Samanta apagou e recomeçou, arriscando o número “20”, na ordem das dezenas. Perguntamos a aluna por que ela abandonou a ideia de que o “três” caberia duas vezes dentro de “173”. A aluna alegou que, ao descobrir que 2 x 3 tinha como resultado o número 6 preferiu tentar um número maior. Ao notar que o número 6 era muito pequeno para seu propósito, Samanta apresentou indicativo do seu sentido numérico e mostrou que desenvolveu o uso da estimativa no raciocínio multiplicativo para, gradativamente, aproximar-se de 173.

Serrazina (2012b) considera que o desenvolvimento de sentido de número surge associado à compreensão das operações e a sua aplicação à situação de resolução de problemas. O sentido de número ou sentido numérico pode ser entendido, segundo Spinillo (PNAIC) (BRASIL, 2014), como uma “habilidade que permite que o indivíduo lide de forma bem sucedida e flexível com os vários recursos e situações do cotidiano que envolvem a matemática” (p. 21). De acordo com Spinillo (PNAIC) (BRASIL, 2014, p. 23) é “através do cálculo mental que são estabelecidas relações numéricas importantes que se relacionam às propriedades das operações (distributividade, comutatividade, associatividade)”. Portanto, para um bom desenvolvimento de sentido de número é necessário que, nas situações de sala de aula, o aluno seja incentivado a falar, escrever sobre o número em diferentes contextos, e utilizar diferentes estratégias e operações para resolver problemas numéricos.

Dentro desses argumentos, propusemos à turma discutir a respeito dos diferentes procedimentos que surgiram na sala para resolver uma situação numérica de divisão. Apresentamos, abaixo, os algoritmos registrados no quadro por cinco alunos na sequência em que são registrados no quadro, sendo que o primeiro algoritmo foi elaborado por Samanta.

Figura 36: Transcrições dos algoritmos feitos no quadro por cinco alunos da turma

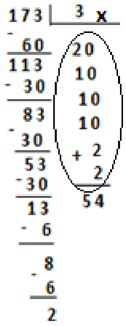


Quando os alunos mostram à turma como fizeram os seus cálculos, eles põem em ação o seu cálculo mental e os seus processos de raciocínio. Esse processo em escolher números cada vez mais próximos do resultado final melhora, gradualmente, à medida que os alunos vão desenvolvendo a sua competência de cálculo. A orientação que demos aos alunos era que deveriam elaborar caminhos de estimativas diferentes. Não é o nosso foco no momento, mas o aluno que ficou com Samanta no quadro, como mostra a figura 35, precisou de nosso auxílio para refazer sua estratégia de forma diferente dos demais. Podemos notar que os resultados parciais dos algoritmos registrados no quociente seguem um padrão de estimativas, iniciando com grandezas maiores da ordem das dezenas e finalizando com as unidades. Verificamos que esses alunos estabeleceram as relações entre os termos do algoritmo, efetuando as operações de divisão, multiplicação, adição e subtração.

4.2.9 - O que Samanta aprendeu

Entre o não-saber e o saber, algo aconteceu, um tempo passou. Samanta internalizou algo do que foi ensinado. Esse conhecimento foi transformado, a partir dos diálogos que desenvolvemos, do material didático utilizado, como um meio de estimular a memorização de Samanta. Analisando o esquema desenvolvido por Samanta, observamos que, inicialmente, ela registra o sinal de multiplicar na chave da divisão e estabelece as relações entre os termos: dividendo, divisor, quociente e resto. Isso foi evidenciado pelo passo a passo do processo desenvolvido pela aluna em primeiro fazer a estimativa de quantas vezes o divisor (3) cabe dentro do dividendo (173), depois efetuou o produto entre o divisor e o quociente e, por fim, subtraiu o produto do dividendo.

Figura 37: Representação do esquema desenvolvido por Samanta



Cada ação operatória de divisão parece ter sido compreendida por Samanta. Se considerarmos apenas o algoritmo como uma sequência de passos finita, Samanta cumpriu esse requisito. Ao fazer, pela primeira vez, o cálculo 113 – 30, a aluna registrou o resultado “73”. Fez a verificação e corrigiu sua solução, escrevendo o resultado “83”. Corrigiu sem nossa interferência, Samanta avaliou, construiu e reconstruiu seu próprio conhecimento, descobrindo sozinha aquilo que precisava ser refeito. O registro da operação pelo método de divisão por subtrações sucessivas, segundo Pires (2012) permite que as crianças compreendam passo a passo do que está acontecendo e dependendo da capacidade que têm de fazer estimativas, a criança tenderá a fazer registros mais curtos. Concordamos com a posição de Pires (2012) que aponta para a não obrigatoriedade da criança chegar ao método curto. Não compreendemos a utilização do algoritmo curto como uma evolução da aprendizagem da criança quanto ao método de resolução.

Polya (1995/1945) descreve quatro etapas que devem ser levadas em conta, quando se trata de resolver um problema. Acreditamos que a aluna Samanta, durante a elaboração de sua estratégia de divisão por subtrações sucessivas, movimentou-se por essas quatro etapas indicadas pelo autor, ao compreender os dados, construir sua estratégia, executá-la e revisá-la. De acordo com Polya (1995/1945), a revisão da solução alcançada é fundamental, pois, oferece aos alunos a defesa de suas estratégias, além de propiciar que avaliem a solução que criara. Samanta mantém um padrão ordenado de estimativa, iniciando quase sempre por dezenas e mantendo as dezenas até esgotarem-se as possibilidades. Só depois é que a aluna arriscava utilizando as unidades. Esse procedimento era diferente de alguns alunos que iniciavam com uma dezena no quociente e decresciam para uma unidade e voltavam a fazer estimativas com dezenas e decresciam para as unidades. Por exemplo, na operação 173÷3 Samanta registrou os seguintes resultados parciais: 10 + 1 + 10 + 2 + 10 + 1 etc. As estimativas de Samanta evidenciam que possui sentido numérico, embora ainda utilize material de apoio como veremos a seguir.

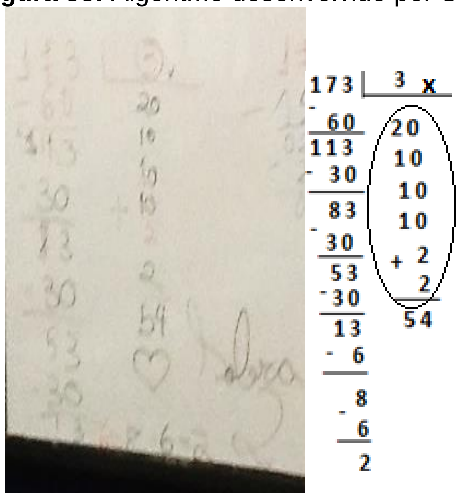
4.2.10 - O que Samanta precisa desenvolver

Ao decorrer a realização da operação observamos que a aluna utilizou o conhecimento operatório que possuía, apoiando–se na contagem dos dedos. A necessidade de contar um mesmo número duas ou três vezes leva algumas crianças a utilizar procedimentos que materializem as quantidades com objetos, desenhos, dedos, resolvendo o cálculo por contagem (PARRA, 1996a). O ato de contar é fundamental. Porém, é interessante que as crianças aprimorem a contagem, empregando a sobrecontagem (contar a partir de determinado número); que aprendam a fazer agrupamentos, contando de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10; e aprendam a operar com fatos fundamentais a fim de automatizar o cálculo (PARRA, 1996a). A memorização de cálculos simples é defendida por Constance Kamii (1984), pelos PCNs (BRASIL, 1997), por Van de Walle (2009) e, Santos (2014). De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

> Uma boa habilidade em cálculo depende de consistentes pontos de apoio, em que se destacam o domínio da contagem e das combinações aritméticas, conhecidas por denominações diversas como tabuadas, listas de fatos fundamentais, leis, repertório básico, etc. [...] não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como conseqüência, a memorização compreensiva desses fatos (BRASIL, 1997, p. 70).

Ao fazerem contagem, usando os dedos, as crianças estão, intuitivamente, repetindo uma ação que foi importante no desenvolvimento das noções numéricas na história da humanidade e, não mostrando uma deficiência em sua aprendizagem dos números. Contudo, a dependência dessas estratégias de contagem (dedos das mãos, risquinhos, bolinhas, desenhos, etc.) impede o desenvolvimento de habilidades matemáticas, se não lhes oportunizarmos o conhecimento de outras estratégias. Skwarchuk (2008) entende que estratégias, baseadas na contagem dos dedos das mãos, são o ponto de partida para a aprendizagem do sentido numérico, mas devem ser substituídas por estratégias mais eficientes e abstratas. Por exemplo, a criança observar que a estratégia por decomposição em que 5 + 5 = 10 auxilia o cálculo de que 5 + 6 deve ser 10 + 1 = 11. Aprender estas estratégias ajuda as habilidades de cálculo se tornarem mais eficientes.

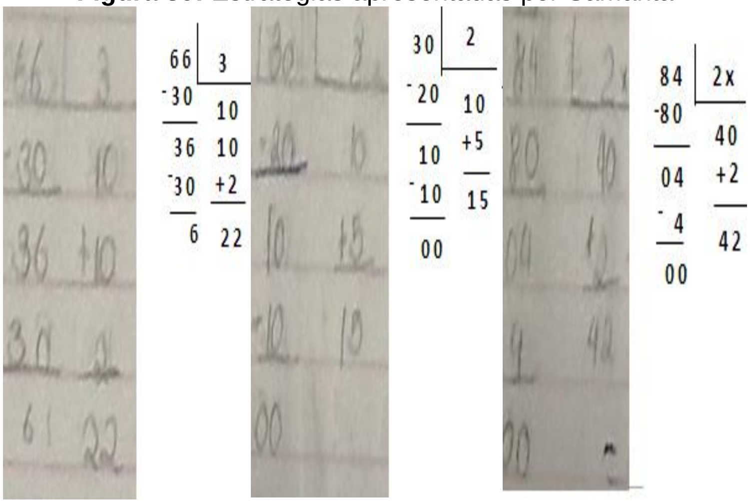
Figura 38: Algoritmo desenvolvido por Samanta



Verificamos que Samanta, ao efetuar a operação de subtração 53 – 30, registrou como resultado o número 13, e na operação seguinte de subtração 13 – 6, ela registrou como resultado o número 8. Por isso, a operação de divisão desenvolvida por ela teve como resultado o número 54 no quociente com resto 2. Considerando que Samanta efetuou os primeiros cálculos de subtração corretamente, o que a levara a cometer os equívocos do final? Há que se considerar que Samanta ficou no quadro sozinha, porque seus colegas finalizaram seus trabalhos antes dela. É possível que tenha se sentido insegura, e isso, provavelmente, provocou a necessidade de escapar da situação incômoda o mais rápido possível e a qualquer custo.

Por sugestão da orientadora, aplicamos uma atividade de casa com as seguintes tarefas: 66 ÷ 3; 30 ÷ 2; 84 ÷ 2. Nestes cálculos, Samanta repete o mesmo procedimento nas quatro contas resolvidas por ela. Inicia com estimativas na ordem das dezenas, reservando as unidades para o momento em que as grandezas eram menores. Há um padrão sequencial na ordem numérica de estimativas apresentadas pela aluna. Em nenhum momento, a aluna oscila entre dezenas e unidades nos resultados parciais. Em outras palavras, Samanta prefere esgotar primeiro a ordem das dezenas para só, então, recorrer à ordem das unidades. Apresentamos ao leitor as soluções de Samanta para estes outros cálculos propostos a ela.

Figura 39: Estratégias apresentadas por Samanta



Outro ponto observado nas estratégias estabelecidas por Samanta é que, na conta "66 ÷ 3", a aluna não multiplica o divisor "3" pelo quociente parcial "2" e, por isso, não fez a subtração "6 – 6 = 0". Por isso, finalizou a operação com o número "6" registrado no local do resto. Visualmente, isso pode implicar em equívocos nas atividades, ao ser preciso solucionar uma situação-problema. Não fizemos nenhuma reflexão com a aluna para saber o motivo dela ter interrompido o cálculo, e se ela entendia que o número 6 não implicava numa operação não exata, com resto 6.

Nesse contexto de interação entre aluno-atividade, foram identificados pela pesquisadora Gómez Chacón (2003/2000) alguns afetos positivos e negativos que se manifestam, durante a realização das atividades matemáticas, a saber: curiosidade; desorientação; tédio; pressa; bloqueio; quebrando a cabeça; desespero; ânimo; confiança; excelência; diversão; prazer; indiferença; tranquilidade. São reações emotivas possíveis de serem identificadas pelo professor na aula de matemática. Identificar os afetos que se manifestam durante a realização das atividades matemáticas tenderá a orientar a prática pedagógica, a fim de potencializar as reações positivas e trabalhar as reações negativas. Gómez Chacón (2003/2000) destaca que

> o desafio dos educadores é irromper e interromper os sentimentos negativos, como passo prévio para a necessária reconstrução afetiva/cognitiva que deve acontecer para o progresso do estudante, encontrando caminhos didáticos que favoreçam tais aspectos (p. 142).

Ter consciência do estresse gerado no aluno, ao ser realizada a atividade em particular ou diante dos colegas, é fundamental para efetivar uma intervenção pedagógica eficiente. Samanta se propôs a ir à frente e expor diante dos colegas seu modo de pensar para resolver os cálculos da tarefa de casa, suas aprendizagens, limitações e fragilidades. É compreensível que reações emocionais sejam geradas na relação entre professor-aluno, aluno-turma, aluno-atividades. São situações em que uma "intenção é gerada com o propósito de resolver um conflito cognitivo ou até mesmo um desequilíbrio conceitual ou problema" (GÓMEZ CHACÓN, 2003/2000). Gómez Chacón (2003/2000) definiu essas reações como "interação cognição-afeto". Tais reações fazem com que o aluno "atualize suas crenças e repercussões a ver com a aprendizagem e tenha condições de dar sentido à atividade" (p. 85).

Discutimos os resultados com a turma, direcionando o olhar dos alunos para as semelhanças e diferenças que haviam nas estratégias elaboradas por diferentes colegas. Polya (1995/1945) afirma que as indagações estruturadas fazem sentido e podem auxiliar o aluno a resolver o problema e a desenvolver a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio. Portanto, é fundamental desenvolver reflexões durante a ação do observar, comparar e analisar os diferentes algoritmos criados pelos alunos. De acordo com Dewey (1979), o pensamento reflexivo é uma capacidade que nos emancipa da ação, unicamente, impulsiva e rotineira para uma ação inteligente. O autor acrescenta que

> somente quando as coisas que nos rodeiam têm sentido para nós, somente quando significam consequências que poderemos obter se manejarmos essas coisas de certo modo, somente então é que se torna possível controla-las intencional e deliberadamente (DEWEY, 1979, p. 27).

O ato de refletir é uma operação mental humana que intenciona uma "plena e adequada compreensão do que ocorre" (DEWEY, 1979, p. 142). Portanto, a reflexão possibilita voltar e rever a ação. Criar condições de trabalho coletivo dentro da escola, favorecendo a análise, os questionamentos, o pensar reflexivo não se consegue facilmente, pois é um processo de conquistas diárias. E é, nesse percurso de conquistas que se constitui um contrato didático apresentado por Pais (2008). Esse contrato é definido dentro de uma relação aluno-conhecimento quando o professor tem a responsabilidade de criar as situações didáticas[29] "através de uma permanente vigilância entre a ação e a reflexão" (PAIS, 2008, p. 85).

4.3 - Reflexões - O que as realizações de Samanta nos ensinaram

Notamos diferenças de estratégias aplicadas pelos alunos, ao resolverem cálculos inseridos em situações-problema de divisão e ao efetuarem contas isoladas. Quando resolvem problemas, alguns alunos tendem a usar, como apoio, o material concreto disponível na sala (tampinhas, palitos ou os próprios dedos) e ao resolverem contas esses alunos não se utilizam de nenhum material de contagem e se apoiam no que se lembram de memória. Embora a pesquisa realizada por Zunino (1995) tenha sido realizada com crianças menores, encontramos semelhança com nossa pesquisa, quando ela diz que "ao analisar o procedimento de crianças de 1ª série, constatou que os mesmos não optam em utilizar material concreto como estratégia para resolverem contas isoladas" (p. 56).

Selva (1998), ao pesquisar sobre o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão relata que "esses materiais são muitas vezes espontaneamente utilizados pela criança por estarem sempre à disposição, como é o caso dos dedos das mãos" (p. 96). Percebemos que os materiais foram usados, quando fazia sentido para compreender a situação-problema.

O processo de cálculo de divisão desenvolvido por Samanta aponta que nós, educadores, antes de pretendermos ensinar o conteúdo de divisão, temos que ter em mente a visão holística do conhecimento que queremos transmitir, bem como sua complexidade, de maneira que possamos "desmontar este conhecimento", isto é, (SERRAZINA, 2012a, p. 3) "torná-lo acessível de modo que os seus alunos o possam compreender". Não basta que o professor tenha o conhecimento matemático, ele

---

[29]Situação didática é formada pelas "múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico" (PAIS, 2008, p. 65).

precisa conhecer o currículo e saber como ensinar. Serrazina ilustra o exemplo dos alunos que precisam adquirir a noção de número. Para que isto seja possível, segundo a autora, é necessário que o professor oportunize “contagens de objetos concretos, comparar o número de elementos de diferentes grupos, ordená-los, etc” (SERRAZINA; 2012b, p. 3). Para além de conhecer os conteúdos matemáticos, é também necessário equacionar o método de ensinar, saber como ensinar.

Em se tratando de divisão, para Miguel e Miorim (1986), essa operação é a que mais apresenta dificuldade não só para quem ensina, mas, principalmente, para quem aprende. Samanta nos ensinou também que precisamos, minuciosamente, enxergar o “ponto”, onde ocorre a dúvida, a fim de atacá- lo. Santos-Wagner (2012; 2013) afirma que “analisar o erro do aluno não é trivial, é preciso querer enxergar o erro, perceber o erro, entender o erro e fazer o planejamento da aula já pensando onde o aluno pode errar e pode acertar”. Conforme Lorenzato (2010, p. 49), “o erro pode ser considerado um indicativo de (re)direcionamento pedagógico porque ele oferece oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor”. Lorenzato (2010) salienta também que é fundamental “corrigir o erro” (p. 50). Portanto, é preciso que o professor identifique o erro como indícios de reais necessidades do aluno, uma vez que os erros “podem ser interpretados como verdadeiras amostragens dos diferentes modos que os alunos podem utilizar para pensar, escrever e agir” (LORENZATO, 2010, p. 50).

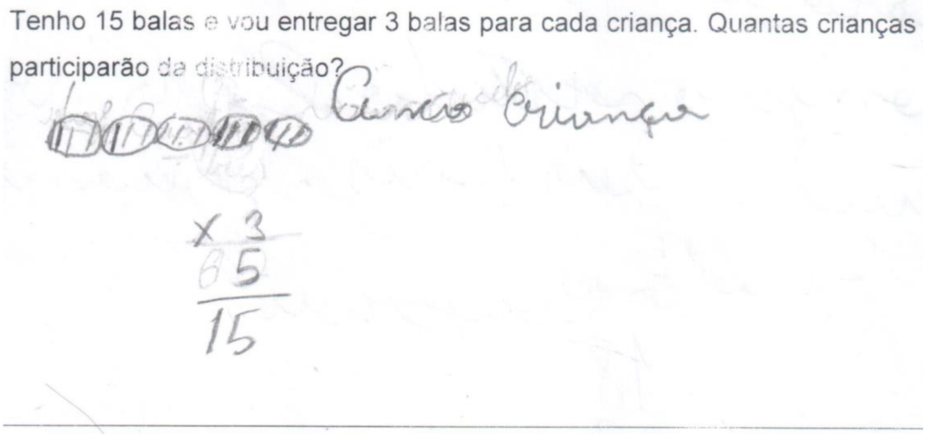
4.4 - Caminhos de Nicolau na aprendizagem de divisão

Durante o período de nossa presença na turma, o aluno faltou a duas aulas: aula de elaboração de problemas de divisão com a ideia de repartir em partes iguais e a aula em que junto com os alunos exploramos a apresentação, no quadro, do algoritmo por subtrações sucessivas. Por isso, ele teve um caminho de aprendizagem diferente de Samanta. Nicolau participava das aulas com argumentos e mostrava-se interessado em desenvolver as atividades propostas por nós.

4.4.1 –Nicolau, resolvendo problemas de divisão com a ideia de medida

O problema de divisão com a ideia de medida caracteriza-se pela relação conhecida em que a distribuição se dá pela correspondência um-para-muitos. Em outras palavras, temos o tamanho das partes já definido e precisamos encontrar quantas vezes uma dada quota cabe dentro de uma quantidade. Nos três problemas de divisão, com a ideia de “quantas vezes cabe”, o aluno não desenvolve a mesma estratégia como fez com os problemas anteriores. No primeiro problema, Nicolau apresenta a estratégia com o algoritmo de multiplicação.

Figura 40: Estratégia de Nicolau para resolver o problema 1 de divisão como medida

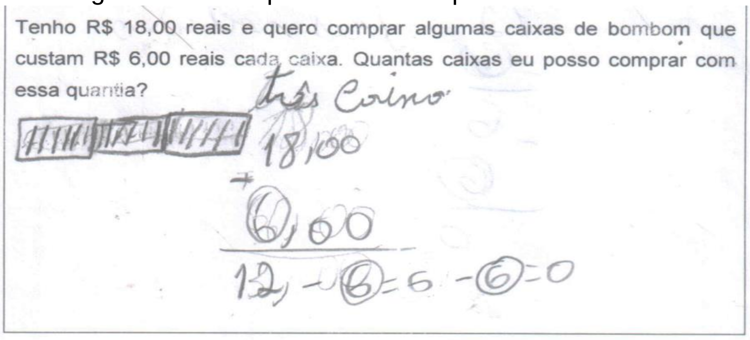


Mesmo aplicando o referido algoritmo, o aluno chega à resposta correta. Deduzimos que ele, provavelmente, recorreu ao seu conhecimento da tabuada de multiplicar, escolhendo um número que multiplicado por 3 desse 15. Isso decorre pela maneira que Nicolau organizou o algoritmo, colocando o resultado da pergunta do problema no lugar do multiplicador, demonstrando ter aprendido. Esclarecemos que Suelen, professora titular da turma, havia trabalhado com a multiplicação antes de iniciarmos com a divisão e tinha a tabuada, com os fatos da mesma, exposta na sala. Contudo, sabemos pela nossa experiência, que o algoritmo de multiplicação não é explorado na escola para resolver tarefas de divisão abordando as ideias de “repartir em partes iguais e de medida”. Entendemos que, no desenvolvimento do algoritmo de divisão, o aluno precisa estabelecer relações entre os termos, efetuando também a operação de multiplicar. Além disso, em problemas simples isso é possível, recorrendo aos conhecimentos da tabuada de multiplicação. O fato de alguns alunos terem utilizado a estratégia de resolução do problema com o algoritmo de multiplicação, como Nicolau fez, demonstrou para nós que, embora ainda, inconscientemente, eles têm noção de que a divisão é o inverso da multiplicação. A ação de operar com o algoritmo de multiplicação pode ter sido efetuada, mediante o suporte da tabuada exposta na sala, pela professora.

Chamamos atenção para o fato de que Nicolau não desenvolveu apenas uma estratégia em sua solução. Fez uso também de esquema, desenhando “risquinhos” para representar as balas. Quando Nicolau estava resolvendo o problema, vimos que ele iniciou fazendo o desenho e mobilizou a ação de contagem e agrupamento. Na intenção de validar a sua solução, o aluno registrou o algoritmo de multiplicação. A situação apresentada a Nicolau se revelou num problema porque, segundo Santos-Wagner (2008) “um problema é algo que queremos ou precisamos resolver e que nos apresenta uma dificuldade inicial" (p. 50).

Nos dois últimos problemas de divisão, implicando o conceito de medida, Nicolau utilizou a subtração. Embora saibamos que a maneira encontrada por Nicolau para representar com símbolos a sentença matemática (*12 – 6 = 6 – 6= 0)* não esteja correta (CARAÇA, 1989/1958), pois dessa forma estaria indicando que 12 – 6 = 0, ele resolveu o problema. Nicolau conseguiu acertar a resposta da pergunta do problema, porque este registro matemático equivocado tinha outro significado para ele.

Figura 41: Estratégia de Nicolau para resolver o problema 2 de divisão como medida



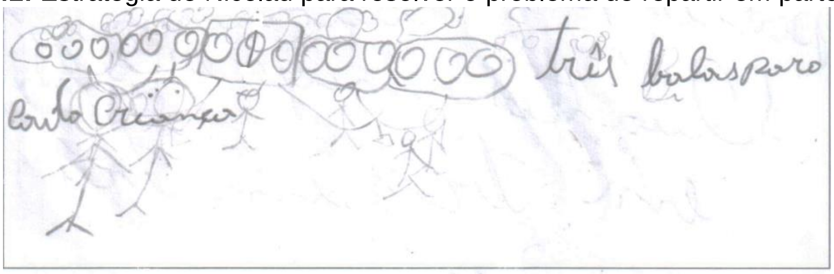
Embora a representação do aluno não esteja correta, do ponto de vista matemático, porque implica que 12 – 6 seja igual a zero, o aluno solucionou o problema, encontrando o resultado corretamente, utilizando a subtração. Não abordamos a questão com Nicolau de que, matematicamente, a representação da estratégia não era uma expressão matemática correta. Ele identificou o tamanho das partes, aqui o valor de (6) reais e que deveria encontrar quantas vezes esta parte cabia dentro do número em que o todo (18) reais foi dividido, ou seja, ele deveria assim identificar a quantidade de caixas que poderia comprar. Esse procedimento pode estar relacionado com a sua capacidade de cálculo mental. E também pode estar relacionado com sua percepção de que poderia ir retirando seis reais de dezoito reais, depois retirar mais seis reais de doze, e depois retirar mais seis reais de seis. Em outras palavras, Nicolau demonstra que tem flexibilidade na manipulação dos números.

Acreditamos que o aluno tenha compreensão dos significados dos números e das operações. Nicolau indicou para nós, por meio de sua estratégia, que tem entendimento quanto à razoabilidade dos resultados. Nicolau inventou procedimentos próprios para solucionar o problema. Notamos que o uso da estratégia de subtração do campo aditivo ajudou o aluno a encontrar o resultado. Identificamos também que ele utilizou a subtração e fez uso do desenho, representando com risquinhos o dividendo. Em seguida, Nicolau circulou o tamanho das partes (6) para encontrar a quantidade de partes. Salientamos que, inicialmente, o aluno procurou sempre resolver partindo do desenho. Ele deixava para fazer o algoritmo, após ter encontrado a resposta usando o desenho. Ao circular o seis, ele nos dá indícios de que notou que, em 18 cabem três grupos de seis. Consideramos que o aluno mesmo iniciando sua estratégia com desenho, conseguiu manter relações do desenho com o algoritmo.

4.4.2 - Nicolau resolvendo problemas de divisão com a ideia de repartir em partes iguais

Mostramos para o leitor a trajetória do aluno Nicolau, a fim de apresentarmos o processo evolutivo de aprendizagem desse aluno. Nicolau desenvolveu, corretamente, sua estratégia pessoal, fazendo desenho nos três problemas que abordavam a ideia de distribuir em partes iguais. Inicialmente, ele desenhou as balas e cinco crianças. Foi distribuindo uma a uma as balas para cada criança. Nicolau fazia esse controle tracejando com lápis uma relação bala-criança. Identificamos essa estratégia por meio das marcas dos registros apagados com borracha. Enquanto Nicolau fazia seu registro, passamos em sua mesa e ficamos felizes com sua primeira ideia de distribuição. Quando ele finalizou os três problemas e nos entregou a atividade, notamos que o registro era outro. Sem questionarmos o motivo de abandono da primeira estratégia, perguntamos-lhe a maneira que foi circulando os grupos do novo desenho. O aluno nos explicou dizendo *“fui circulando de três em três”.*

Figura 42: Estratégia de Nicolau para resolver o problema de repartir em partes iguais



Se desconsiderarmos as marcas do primeiro desenho apagado de Nicolau, é possível acreditarmos que o aluno circulou, corretamente, com agrupamentos de três em três. O procedimento de Nicolau diante do problema foi representar o todo (15 balas) e associar a contagem com o número de crianças. Essa relação é caracterizada com a correspondência termo a termo – uma bolinha para cada criança. Pensamos que o aluno em sua primeira estratégia tenha utilizado seus conhecimentos acerca da contagem, distribuindo o todo em partes. Sabemos que o problema se refere à descoberta do tamanho das partes, apesar de reconhecermos que ter sido formulado com uma quantidade pequena pode induzir o aluno a mobilizar o cálculo de fatos fundamentais já memorizados.

O esquema de distribuição equitativa do referido aluno, apresentada em seus primeiros registros, baseou-se no raciocínio aditivo, em que do todo (15 balas) foram retiradas as partes (5 partes) depois de uma distribuição inicial até se esgotar a quantidade total a ser distribuída. Não esperávamos que o aluno relacionasse as quantidades aos termos da divisão, porque, até esse momento, a professora titular da turma não havia trabalhado esse assunto. Depois que o aluno desenvolveu sua primeira estratégia pessoal, encontrando o tamanho de cada parte, desmanchou seus registros, refazendo com outro desenho, tendo apenas que circular a resposta já encontrada anteriormente. Verificamos que Nicolau identificou, na primeira estratégia, o elemento desconhecido do problema e também a ação que precisava desenvolver, relacionando o todo com a quantidade de elementos para associar a cada criança.

4.4.3 – Problema criado por Nicolau com a ideia de divisão como medida

A formulação do problema de divisão com a ideia de quanto cabe foi realizada por Nicolau no dia 04 de outubro. Foi solicitado ao aluno Nicolau que elaborasse um problema de divisão com a ideia de medida, envolvendo os dados numéricos 18 e 6, semelhante ao seguinte problema:

Figura 43: Problema de divisão com a ideia de medida

Tenho R$ 18 reais e quero comprar algumas caixas de bombom que custam R$ 6,00 reais cada caixa. Quantas caixas eu posso comprar com essa quantia?

Esta atividade fazia parte da sequência de atividades diagnósticas. Inicialmente Nicolau escreveu "*foi [fui] ao shopping e comprei uma casa [calça] por dezoito reais e uma camisa por seis reais. Descubra sefo [se for] capas [capaz]"?* Para resolver esse problema que ele criou, ele efetuou a operação de adição com os dados numéricos 18 e 6 e registrou como resposta 23 reais. Notamos que Nicolau não identificou que tanto o procedimento quanto a resposta não se encaixavam em uma situação de divisão.

Sentimos necessidade de conversar com Nicolau e ouvir dele quais eram as intenções dele em formular um problema de adição. Isso era necessário para verificar o grau de compreensão que Nicolau assimilou acerca da operação de divisão. Na aula realizada no dia 07 de outubro, tivemos um momento com o aluno e desenvolvemos o seguinte diálogo, a respeito do problema criado por ele.

> P.P.: O que você não sabe e quer descobrir em seu problema?
> Aluno Nicolau: É para fazer uma conta de mais.
> P.P.: Sim, mas para descobrir o quê?
> Aluno Nicolau: Preciso descobrir quanto que eu gastei comprando a calça e a camisa.
> P.P.: Você acha que se outra pessoa lesse seu problema entenderia o que deveria ser calculado fazendo apenas a leitura?
> Aluno Nicolau: Acho que sim.

Fizemos uma breve reflexão do problema com bombons e propusemo-lo à turma. O propósito era que Nicolau e os demais percebessem a estrutura do problema de divisão já trabalhado: situação-problema com as informações necessárias, conduzindo a uma pergunta.

Figura 44: Diálogo com Nicolau

P.P.: Nicolau, que informações o problema traz? Aluno Nicolau: Eu estou com dezoito reais e quero comprar bombom.

P.P.: Quantos bombons deseja comprar?
Aluno Nicolau: Caixas.
P.P.: Mas quantas caixas, tem essa informação?
Aluno Nicolau: Tem não. Só fala que custa seis reais e tem a pergunta.
P.P.: E como é que você identificou a pergunta?
Aluno Nicolau: Tem o ponto no final.
P.P.: Hum, se colocarmos o ponto de interrogação em qualquer frase vira uma pergunta, é?
Aluno Nicolau: ah, vira sim.
P.P.: E qual é a sua pergunta?
Aluno Nicolau: descubra se for capaz.
P.P.: Descobrir o quê? A camisa você disse que custa seis reais e a calça dezoito. Tem alguma coisa para descobrir?
Aluno Nicolau: Tem sim, quanto deu tudo.
P.P.: Onde é que você escreveu isto que acabou de dizer?
Aluno Nicolau: *(calado)*
P.P.: Você precisa escrever a pergunta por que pra mim você explicou. E se este problema tivesse escrito no livro, como saberíamos que ele quer saber quanto deu a conta? E se fosse para saber se deu para pagar a conta com dezoito reais ou saber apenas o troco da compra? Entende, precisamos escrever aquilo que estamos pensando. Você pensou em saber o total da compra, mas não escreveu.

Todo o diálogo que desenvolvemos com Nicolau teve, inicialmente, a intenção de refletir com ele a respeito da estrutura do problema criado por ele. Queríamos fazer algumas relações com o problema planejado por nós. Mostramos para o aluno a ausência da questão em seu problema. Nesse primeiro momento, nosso objetivo não era abordar o fato de que a situação-problema inventada por ele não se encaixava numa estrutura de um problema de divisão do campo multiplicativo.

Notamos, durante o período de observação, que era comum a professora Suelen propor desafios com situações-problema que terminassem com a frase imperativa “*Descubra se for capaz!*”. Nicolau mostrou para nós que, mentalmente, tinha o problema estruturado. Sabemos, pela nossa experiência, que isso acontece com algumas crianças em situações que é necessário o registro escrito. Ao produzir textos, a mente criativa avança mais rápido do que a coordenação motora. O aluno mostrou que tinha clareza quanto à pergunta do problema formulado em sua mente. Além disso, é possível que ele não tenha sequer se preocupado de que seu texto deveria ser escrito para o outro ler.

> P.P.: E para descobrir quanto deu a conta, de que maneira podemos fazer isso?
> Aluno Nicolau: Fazendo conta de mais. Posso fazer outro problema?
> P.P.: Outro? Por que você quer fazer outro?
> Aluno Nicolau: Esse vai ser de mais, de juntar.
> P.P.: E o que foi pedido?
> Aluno Nicolau: Tem que ser de dividir.
> P.P.: Então, vai em frente.

O aluno Nicolau, após nossa mediação, escreveu a seguinte situação:

Figura 45: Problema de divisão elaborado por Nicolau com a ideia de medida

Karol tem dezoito reais. Ela quer compro [comprar] vestido [vestidos]. Cada vetido [vestido] custa seis reais. Quantos vestido [vestidos] ela couprou [comprou]? 18 – 6 = 12 – 6 = 6 – 6 = 0 – três vestido

Sem a nossa intervenção, ele elaborou um problema de divisão bem estruturado no qual identificamos as informações necessárias para descobrir algo. Temos indícios de que o aluno compreendeu a ideia de divisão como medida, deixando claro o tamanho do todo e o tamanho de cada parte. Assim, como no problema planejado por nós, a pergunta era a quantidade de caixas, no problema de Nicolau o que desejávamos saber era a quantidade de vestidos.

O outro ponto que queremos analisar é a estratégia de solução apresentada por ele. O esquema mental elaborado por Nicolau se encaixa, perfeitamente, na ideia da divisão em que subtraímos as partes fixas pré-definidas, do todo. Entretanto, ele usa novamente a mesma estratégia equivocada de ir registrando todas as subtrações juntas e redigindo sentenças matemáticas equivocadas ao registrar 18 – 6 = 12 – 6= 6 – 6 = 0. Ele fez o mesmo tipo de registro equivocado neste problema criado por ele, tendo encontrado a resposta certa, mas registrando seus cálculos com igualdades inadequadas como ele fez no problema das caixas de bombons. Apenas posteriormente quando analisamos estes registros é que notamos que precisamos dialogar com Nicolau a respeito deste equívoco em seus registros. Ele precisa compreender que deve realizar estas subtrações separadamente e que deve também registrar as mesmas de forma separada. Provavelmente para Nicolau tenha sentido estes registros, pois ele responde três vestidos para seu problema. Mas ele precisa estar ciente de que matematicamente estes registros de igualdades entre todas as subtrações está errado.

Alguns alunos, entre eles Nicolau, solucionaram a situação-problema de divisão da caixa de bombons aplicada por nós, com desenhos. Ao solicitarmos que eles criassem outro problema, sugerimos à turma que tentassem solucionar sem usarem desenhos. Nicolau, então, apresenta sua solução, relacionando a divisão com a ideia de subtrair. Acreditamos por isso, que houve, minimamente, um progresso na estratégia escolhida por ele para resolver o problema, envolvendo a divisão.

Esclarecemos que, no intercurso entre o primeiro momento, quando foi aplicada a atividade e o segundo momento, quando os alunos fizeram, novamente, o mesmo problema, exploramos as diversas maneiras de resolução da tarefa matemática evidenciando as relações entre as quatro operações. O objetivo era demonstrar os diferentes caminhos para se resolver a mesma tarefa. Por exemplo, ao aplicarmos, inicialmente, a situação-problema de divisão “Tenho 15 balas e quero dividir, igualmente, entre 5 crianças. Quantas balas cada criança receberá?”, alguns alunos, para registrarem as quantidades, representaram, fazendo desenhos – bolinhas ou risquinhos e esses registros icônicos assumiam valor dentro do contexto do problema. Na primeira aula, deixamos que os alunos escolhessem, livremente, estratégias de cálculo espontâneas a fim de solucionarem as situações-problema, dentre elas, representação icônica, tentativa de algoritmo, cálculo mental e operação inversa.

Fizemos uma análise preliminar para tentarmos interpretar os procedimentos de cálculo realizados por eles e para identificarmos as dificuldades que apareciam e as relações com os conhecimentos das operações de adição, subtração e multiplicação e o sistema de numeração decimal. Depois de conversarmos com a professora orientadora e buscarmos juntas compreender o que estava posto pelos alunos em seus registros, traçamos alguns procedimentos de atuação para nossa intervenção pedagógica. Foi explicada novamente, cada situação-problema de divisão, tendo o cuidado de demonstrar as várias possibilidades de resolvê-lo. Também incentivamos os alunos a tentarem fazer registros que não fossem com representações icônicas, refletindo com eles que o símbolo numérico também se relacionava com a quantidade envolvida no problema.

No problema de divisão das balas, ilustramos a situação, utilizando tampinhas de garrafa pet, representando as balas e dialogando com a turma de que maneiras era possível distribuirmos igualmente as balas entre as cinco crianças. A intenção era de que os alunos compreendessem que, numa situação de divisão como esta, havia a possibilidade de fazer a distribuição de um a um, dois em dois, ou seja, da forma como quisessem. Foi perguntado aos alunos sobre as implicações em fazer escolhas de distribuição de um a um, ou de dois em dois, cinco em cinco ou dez em dez. Os alunos perceberam e comentaram que, em algumas situações, como por exemplo, em grandes quantidades, o procedimento de distribuir de um em um é um pouco mais demorado. Enfatizamos que, embora fosse demorado, é um procedimento correto para resolvermos a situação de distribuir em partes iguais.

4.4.4 – Estratégias de Nicolau realizadas na avaliação de matemática

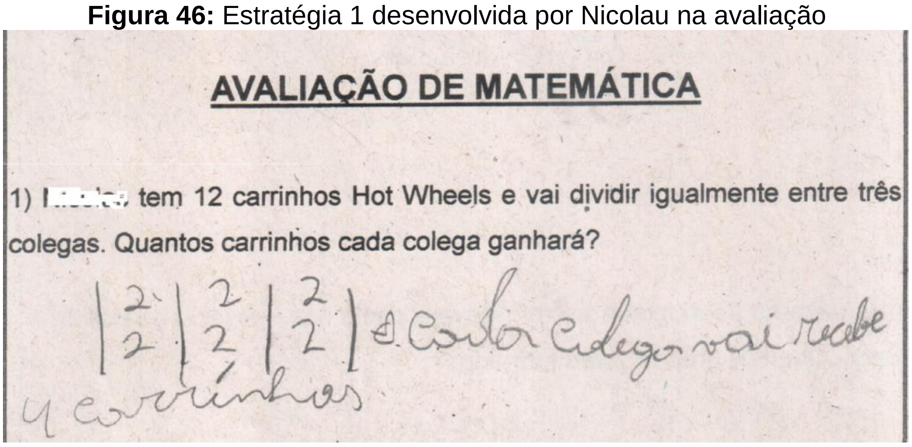
a) Problema 1

A professora Suelen aplicou uma avaliação com situações-problema, incluindo a divisão. Ela informou aos alunos que consideraria qualquer estratégia elaborada por eles. Suelen constatou que valorizar as estratégias dos alunos, a partir de seus conhecimentos prévios, resultaria na apropriação dos sentidos da operação. De acordo com Ponte, Matos e Abrantes[30] (1998) citado por Ferreira (2005)

> a identificação e o reconhecimento do valor destes processos por parte do professor é importante no ensino-aprendizagem dado que o conhecimento formalizado dos conceitos e processos matemáticos só se pode construir com segurança a partir do conhecimento informal já possuído pelos alunos (p. 114).

Suelen começou a nos dar indícios de que reconhecia esse conhecimento absorvido pelos alunos para a construção de novas aprendizagens adquiridas em outros momentos sem a mediação do professor e passou a valorizar ainda mais esse processo. Ao planejar as atividades, ela tinha por hábito criar situações com os nomes dos alunos. Informamos ao leitor que rasuramos o nome de um dos alunos escrito no início do problema para manter o sigilo acerca da identidade do mesmo.

Figura 46: Estratégia 1 desenvolvida por Nicolau na avaliação



AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1) [redacted] tem 12 carrinhos Hot Wheels e vai dividir igualmente entre três colegas. Quantos carrinhos cada colega ganhará?

| 2 2 | 2 2 | 2 2 | a Cada Colega vai recebe 4 carrinhos

Esse registro foi feito por Nicolau na avaliação elaborada pela professora Suelen. Notamos que o aluno elaborou sua solução, apresentando uma das estratégias

---

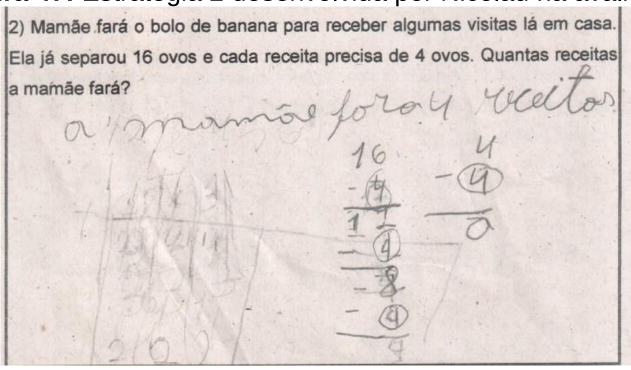
30 PONTE, J. P.; MATOS, J. M.; ABRANTES, P. **Investigação em educação matemática.** Lisboa, 1998.

trabalhadas por nós para situações-problema, envolvendo a ideia de dividir em partes iguais. O aluno distribuiu, igualmente, para cada uma das partes a mesma quantidade do início ao fim. Teve o cuidado de separar três grupos para essa finalidade. Ele controlou o todo (12), identificou a quantidade de partes, separando os grupos (3) e compreendeu que precisava distribuir, equitativamente, a quantidade entre as partes. À medida que ia distribuindo, o aluno fazia, mentalmente, o cálculo de adição. Mostrou também que realizou a adição para somar os resultados parciais. Isso ficou claro para nós na resposta que Nicolau registrou.

b) Problema 2

Nesta situação-problema está implícita a ideia de divisão como medida. Juntamente com a professora Suelen e nossa orientadora, verificamos que o enunciado induzia a interpretações diferenciadas. A situação-problema diz que "*mamãe fará o bolo"* e a resposta que deve ser encontrada é *"quantas receitas a mamãe fará"*. Felizmente, Nicolau não apresentou dúvidas a esse respeito. Contudo, sabemos que precisamos ter cuidado, ao formularmos os enunciados de questões matemáticas, para que os alunos compreendam a tarefa que precisam executar.

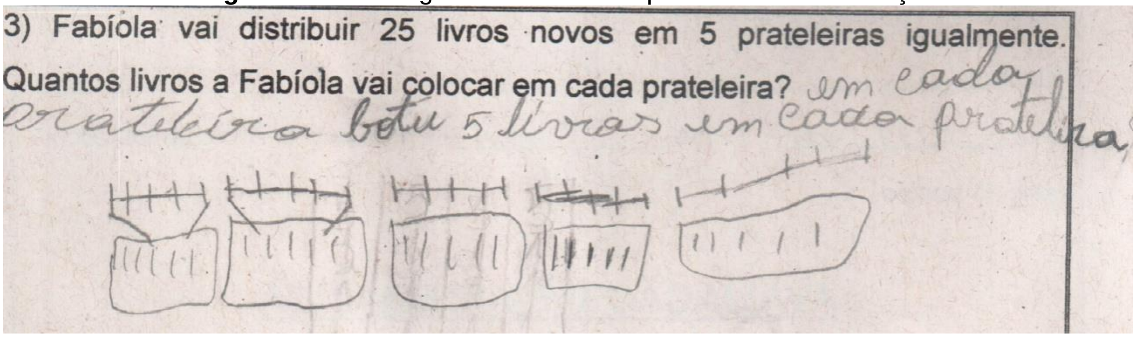
Figura 47: Estratégia 2 desenvolvida por Nicolau na avaliação


2) Mamãe fará o bolo de banana para receber algumas visitas lá em casa. Ela já separou 16 ovos e cada receita precisa de 4 ovos. Quantas receitas a mamãe fará?

Podemos notar que Nicolau identificou diferenças no procedimento para resolver a situação do problema 1 e do problema 2. No problema 1, onde consta a ideia de distribuir em partes iguais, ele desenvolveu uma estratégia em que a ação era adicionar, juntar, obtendo o resultado corretamente. No problema 2, ele desenvolveu uma estratégia com subtrações sucessivas, encontrando o resultado corretamente. Vemos que, além de subtrair o tamanho das partes, ele circulou a retirada, fazendo o controle de sua contagem e identificou a resposta da pergunta. No entanto, destacamos que ele continua usando registros equivocados ao ir subtraindo tudo direto, pois assim provavelmente irá registrar estas subtrações em sentenças matemáticas equivocadas como fez antes no problema das caixas de bombons e no problema criado por ele dos vestidos.

c) Problema 3

Figura 48: Estratégia 3 desenvolvida por Nicolau na avaliação



Nicolau apresentou, corretamente, sua estratégia para o terceiro problema, utilizando desenho. É possível que ele tenha escolhido o desenho para controlar o processo de contagem porque o dividendo era maior do que os dois primeiros problemas anteriores. Nicolau desenhou o todo (25 risquinhos), representando os livros e desenhou as cinco partes, sugerindo as prateleiras. Importa destacarmos que ele demonstrou que sabia que as quotas correspondiam aos livros. Observamos isso tanto na representação icônica, desenhando as cinco prateleiras (cada uma com cinco livros) como na resposta escrita em linguagem natural.

Finalizando as atividades planejadas por nós, trabalhamos as atividades de divisão, sugeridas pelo livro “Projeto Buriti – Matemática – 4º ano[31]”, que consta no anexo 3. Para cada questão abordada pelo livro didático, alguns alunos demonstravam seu procedimento de cálculo para os outros colegas no quadro. A intenção era explorar o máximo de estratégias para resolver uma situação-problema de divisão e relacionar as escolhas dessas estratégias com as ideias básicas da divisão. As atividades exploradas pelo livro didático nas páginas seguintes envolvem as duas ideias básicas

---

[31] PROJETO BURITI: matemática. Organizadora Editora Moderna. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela editora Moderna. Editora responsável: Mara Regina Garcia Gay. 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2011.

da divisão, ora como repartir em partes iguais ora relacionada à ideia de quantas vezes cabem e também envolvem a possibilidade de mais de uma resposta.

Compreendemos que os alunos podem resolver as situações, utilizando outras operações que não seja a divisão. É possível que, em algum momento, alguns alunos percebam as relações entre a multiplicação e a divisão como a operação inversa uma da outra. Contudo, segundo Nunes e Bryant (1997) não há necessidade, nesse momento, de evidenciarem que são operações inversas. Nas atividades que exploram a divisão exata e a divisão não exata, o aluno é levado a observar o resto da divisão para poder classificar como exata ou não exata e a perceber a diferença entre elas bem como compreender a importância do resto no resultado da divisão. Estas atividades exigiram do aluno a interpretação do resto no contexto do problema. As situações elaboradas pelo livro didático também abarcaram as duas ideias associadas à divisão: repartir em partes iguais e medida.

Foi importante para nós fazermos essas reflexões durante a coleta de dados. Pudemos aprender a nos colocar no lugar do aluno, diante dos desafios de uma atividade, fazendo algumas previsões de acertos e erros. Também aprendemos a refletir sobre os pontos positivos e negativos entre uma atividade e outra, a olhar o trabalho com as informações advindas dessas reflexões e pudemos trocar ideias com a orientadora e com colegas do grupo de estudos/GEEM-ES, do qual participamos.

CAPÍTULO V
CONSIDERAÇÕES FINAIS

O menino que carregava água na peneira

Tenho um livro sobre águas e meninos.
Gostei mais de um menino que carregava água na peneira.
A mãe disse que carregar água na peneira era o mesmo que roubar um vento
e sair correndo com ele para mostrar aos irmãos.
[...] que era o mesmo que catar espinhos na água
O mesmo que criar peixes no bolso.
O menino era ligado em despropósitos.
Quis montar os alicerces de uma casa sobre orvalhos.
A mãe reparou que o menino gostava mais do vazio do que do cheio.
Falava que os vazios são maiores e até infinitos.
Com o tempo aquele menino que era cismado e esquisito
porque gostava de carregar água na peneira
[...] descobriu que escrever seria o mesmo
que carregar água na peneira.
No escrever o menino viu que era capaz de ser
noviça, monge ou mendigo ao mesmo tempo.
[...] aprendeu a usar as palavras.
Viu que podia fazer peraltagens com as palavras.
E começou a fazer peraltagens.
Foi capaz de interromper o voo de um pássaro botando ponto final na frase.
Foi capaz de modificar a tarde botando uma chuva nela.
[...] fazia prodígios e uma pedra dar flor!
A mãe reparava o menino com ternura.
A mãe falou: Meu filho você vai ser poeta.
Você vai carregar água na peneira a vida toda.
Você vai encher os vazios com as suas peraltagens
e algumas pessoas vão te amar por seus despropósitos.
Manoel de Barros[32]

Neste capítulo, trazemos uma breve reflexão sobre este estudo, além de tecermos algumas considerações a respeito dos resultados analisados no capítulo anterior. Em seguida, assinalamos algumas mudanças na prática pedagógica da professora pesquisadora e finalizamos, apontando limitações e desdobramentos desta pesquisa.

[32]http://www.poesiagalvaneana.com.br/2013/05/o-menino-que-carregava-agua-na-peneira.html#.U5ZkoHKwIqc. Acesso em 09/06/2014.

5.1- Reflexões sobre a pesquisa

Iniciamos o trabalho de campo no dia 10 de setembro de 2013 e encerramos nossas atividades junto à escola, alunos e professora no dia 02 de dezembro de 2013. Para respondermos à nossa questão de pesquisa, planejamos e aplicamos duas sequências de tarefas de divisão. A primeira sequência foi de caráter diagnóstico constituída de resolução de situações-problema, compreendendo as duas ideias básicas de divisão e de elaboração de problemas. A segunda sequência teve caráter de experimento de ensino e envolvia tarefas que explorassem cálculos de divisão para aprender alguns algoritmos. Também envolvia resolução de cálculos de divisão, elaboração de outras contas isoladas e resolução de problemas em uma atividade avaliativa.

Os objetivos de nossa pesquisa eram: i) Analisar as estratégias de alunos para resolver tarefas de divisão antes de um experimento de ensino da operação de divisão; ii) analisar as estratégias e aprendizagens de alunos após um experimento de ensino de divisão.

Conduzimos conversas informais individuais com os alunos participantes da pesquisa a fim de compreender o uso das estratégias desenvolvidas por eles nas tarefas propostas. Coletamos os dados com registros de observações, gravações de alguns episódios de aulas observadas e o registro fotográfico das soluções desenvolvidas nas atividades. Levamos em consideração os aspectos afetivos e emocionais evidenciados durante a realização das atividades propostas. Para isso, nos baseamos nos estudos de Gómez Chacón (2003/2000).

Analisamos alguns dados da turma como um todo e focalizamos em dois alunos. Tivemos o cuidado de fazer as análises individualmente, de acordo com os conhecimentos prévios apresentados pelos alunos Samanta e Nicolau e os conhecimentos adquiridos após a aplicação de um experimento de ensino formal. Segundo Vygotsky (2001), o nível de desenvolvimento proximal difere de um aluno para outro. Assim, procuramos compreender como esses dois alunos pensavam e resolviam as tarefas propostas. Enfim, olhamos sem pressa, com atenção cada aluno, observando avanços e limitações dentro do processo de aprendizagem de cada um.

5.2- Considerações a respeito dos resultados

Iniciamos comentando o que identificamos sobre conhecimentos e estratégias de divisão nas atividades diagnósticas. Assim, respondemos ao início de nosso questionamento de pesquisa. Nossa investigação revelou que os alunos apresentaram diferentes procedimentos para uma mesma situação numérica aos quais tratamos como estratégias combinadas. Alguns alunos utilizaram em seus procedimentos de cálculos a representação com desenho junto com algum algoritmo. Dialogando com esses alunos, a fim de compreender seus esquemas, verificamos que uns sempre iniciavam com o desenho e formalizavam com uma conta. Nem sempre as contas apresentadas por eles tinham força para auxiliar na compreensão do procedimento a ser efetuado. Acreditamos que para esses alunos fazer a conta representava finalizar numa linguagem matemática, o procedimento padrão de resolução de problemas.

Notamos que o material manipulativo para fazer a contagem antes do registro escrito foi empregado por alguns alunos. Outros foram diretamente para o registro no papel utilizando desenhos. Acreditamos que iniciar o trabalho com a operação de divisão, proporcionando liberdade aos alunos para expressar novas estratégias de solução, não tratando o conteúdo das operações numa abordagem linear, mas trabalhando, conceitualmente, de forma integrada entre elas, evitaria a construção de alguns conceitos errôneos aprendidos no campo das operações.

Quando se oportuniza aos alunos elaborarem suas estratégias na resolução de problemas de divisão, os conhecimentos prévios que eles têm são mobilizados para solucionar a situação-problema. Contudo, quando o conteúdo de divisão está baseado apenas no ensino do algoritmo, constrói-se uma relação estreita entre a memorização da tabuada de forma mecânica. Isso faz com que a aprendizagem da operação exija apenas um modelo previamente ensinado pelo professor. Nesse caso, resolver uma situação-problema de divisão se resume a efetuar uma conta isoladamente.

Ao analisarmos os registros dos alunos na atividade diagnóstica de resolução de situações-problema de divisão, notamos que eles resolveram de diferentes formas, mostrando como compreendiam a divisão até aquele momento. Percebemos uma predominância no uso das representações icônicas (desenhos). Essas estratégias auxiliaram os alunos a responder corretamente as situações-problema de divisão. Tivemos na situação-problema com a ideia de repartir em partes iguais um total de 34 acertos utilizando o desenho. Na situação-problema com a ideia de medida tivemos um total de 16 acertos. Mesmo sendo alunos de uma turma de 3ª série/4º ano, consideramos positivas as soluções apresentadas pelos alunos, porque nos indicaram a bagagem de conhecimentos acerca das operações que eles já têm. Observar esse cenário possibilita ao professor compreender onde seus alunos estão em termos conceituais e operatórios de divisão. O professor de posse dessas observações a respeito de seus alunos pode basear seu trabalho pedagógico na construção e/ou aprofundamento do conceito e na exploração dos diferentes caminhos de cálculo.

Quando o objetivo do ensino é estimular a autonomia intelectual, importa que seja oferecida ao aluno liberdade de escolha das estratégias de cálculo associada às situações de discussões entre os colegas e o professor. Também salientamos a importância de se investir na formação continuada dos professores, que ensinam matemática nas séries/anos iniciais do ensino fundamental I. Professores e alunos precisam ter conhecimento a respeito das estratégias possíveis para solucionar uma situação que envolva a operação de divisão. Desse modo, é possível compreendermos e considerarmos a elaboração das estratégias que alunos desenvolvem, fundamentados em conhecimentos prévios, mesmo que não seja uma estratégia formal como, por exemplo, o algoritmo longo.

Em suma, as soluções apresentadas pelos alunos levam a crer que lhes dando oportunidade de participarem da aula por meio de argumentação, elaboração de atividades, conjecturas, eles terão condições de criar estratégias criativas e eficientes na resolução de problemas de divisão. Foi possível percebermos que os alunos compreenderam melhor as situações-problema, envolvendo a ideia de partes iguais do que os problemas de divisão com a ideia de medida. Isso vai de acordo com alguns autores (FISCHBEIN, DERI e MARINO, 1985 apud SELVA, 1998) que sugerem que comecemos o conteúdo de divisão com a ideia de repartir ou distribuir em partes iguais.

Também identificamos a representação icônica como a estratégia mais utilizada pelos alunos na busca das soluções das situações-problema, incluindo as duas ideias básicas de divisão. A divisão como partilha que os alunos fizeram, usando o desenho demonstrou que eles compreenderam a ideia e que recorreram a um esquema de contagem de um a um ou de dois em dois até esgotar o conjunto que queriam dividir a partir da intuição e da experiência deles. Portanto, é imprescindível que, na aula de matemática, o professor planeje um ensino pautado na construção de conceitos matemáticos e na valorização das estratégias que surgem das experiências e conhecimentos prévios dos alunos.

A estratégia de cálculo mental, considerando apenas a resposta dos alunos sem explicitação de cálculo, teve maior predominância nas situações-problema de divisão, incluindo a ideia de medida. Essas soluções apresentadas por alguns alunos consideradas por nós como cálculo mental revelaram que esses alunos já possuem alguma habilidade de cálculo e de compreensão da divisão. Carpenter *et al.* (1999) citado por Ferreira (2005) afirma que “os alunos têm mais facilidade em resolver os problemas de divisão por medida, dado que contam por saltos e já sabem o número de objetos em cada grupo” (p. 125). Com alguns alunos, isso de fato aconteceu, contudo, não ocorreu com a grande maioria como podemos comparar entre as duas tabelas de resolução de problemas para a turma toda.

Para nós ficou evidente que os alunos têm mais facilidade em resolver situações de divisão, envolvendo distribuição em partes iguais até esgotar a distribuição dos elementos. A maioria dos alunos que respondeu, corretamente, ao problema não fez o uso de nenhum algoritmo convencional. Usaram estratégias alternativas possíveis de solucionar as situações-problema.

Passamos a relatar nossas compreensões e indícios de resposta da segunda parte da questão central feita no início desta pesquisa, **que estratégias e ideias de divisão alunos de 3ª série/4º ano do Ensino Fundamental evidenciam após esse experimento.** Identificamos que os alunos vão aplicando estratégias mais eficientes e complexas, de acordo com a capacidade que eles têm no momento em que resolvem a situação-problema de divisão. Serrazina (2002, p. 59) recomenda que a “introdução dos algoritmos das quatro operações seja protelado para mais tarde e seja dada uma forte ênfase ao desenvolvimento do cálculo mental”. Segundo Jesus (2005), há uma “pressa com os registros escritos de procedimentos que nem sempre têm significado para quem os faz” (p. 94). Em contrapartida, “muitos alunos são bem sucedidos em efetuar os algoritmos aritméticos, mas perante um problema não são capazes de identificar a operação necessária” (JESUS, 2005, p. 94). É possível que isso ocorra quando o aluno ainda não adquiriu o sentido de número e as operações não fazem sentido algum para ele. Nesse caso, é importante que o aluno caminhe na construção do seu próprio pensamento além de estabelecer “ligações entre as suas intuições, a linguagem informal e as operações a partir de suas experiências” (JESUS, 2005, p. 94).

Quando oportunizamos na aula de matemática, em nossa pesquisa, que o aluno compreendesse que não há um único processo para calcular um quociente e que há diferentes estratégias que podem ser utilizadas para resolução de problemas de divisão, possibilitamos maior envolvimento dos alunos na aula e uma aprendizagem significativa. Não há necessidade de nós, professores, nos apressarmos com o ensino do algoritmo de divisão ou outra operação dentro de uma concepção de que aritmética se resume à aprendizagem do algoritmo das operações, pois já nos conscientizamos de que aritmética implica em conceitos numéricos interligados e com significado.

Alguns autores (NUNES & BRYANT, 1997; LORENZATO, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008; IMENES, 2012) argumentam que se torna improdutivo introduzir conceitos abstratos antes de o aluno ter compreendido a linguagem matemática referente ao algoritmo e construído o sentido da divisão. Isso porque é importante trabalhar primeiro com situações mais próximas da realidade do aluno em que ele manuseie objetos, a fim de que se aproprie da linguagem matemática e do sentido da operação que está sendo efetuada. A escrita simbólica, segundo Jesus (2005, p. 95) “só deve aparecer depois de trabalhadas e compreendidas situações concretas”.

Notamos que houve um movimento progressivo dos alunos entre a fase diagnóstica ao demonstrarem seus conhecimentos prévios por meio de suas estratégias e após termos problematizado situações com caminhos alternativos de resolução. Para tanto, salientamos que discutir as várias possibilidades de solução, além de valorizar os caminhos escolhidos pelos alunos na tentativa de efetuar os cálculos, constituem mecanismo relevante no processo de ensino-aprendizagem de divisão. Por outro lado, valorizar, discutir e fazer conjecturas com os alunos sobre as estratégias escolhidas por eles na etapa diagnóstica favoreceu a compreensão do conceito de divisão, pois conseguiram solucionar as situações-problema, através de caminhos alternativos. Acreditamos que seja isso o que Ferreira (2005, p. 120) aponta ser “pensar a matemática em voz alta”. Dar condições para que no ambiente da sala de aula de matemática, os alunos se sintam à vontade em socializar suas estratégias, as experiências e aprendizagens matemáticas, como foi oportunizado aos alunos, sujeitos desta pesquisa.

Durante o experimento de ensino, exploramos com a turma as soluções apresentadas por eles na etapa diagnóstica e desenvolvemos outras dentro da mesma situação-problema de divisão. A apresentação do algoritmo por subtrações sucessivas foi planejada após resolvermos com os alunos várias atividades, abrangendo caminhos alternativos de solução para os problemas apresentados. Por isso, cabe ressaltar que o fato de o algoritmo ter sido apresentado após termos explorado várias situações de divisão não constituiu, de modo algum empecilho para que os alunos solucionassem as questões matemáticas. Alguns alunos demonstraram, após nosso experimento de ensino, que assimilaram e compreenderam o significado da divisão.

Quando partimos para a etapa do ensino do algoritmo de divisão por subtrações sucessivas, notamos que alguns alunos compreenderam o processo. Não tivemos tempo para explorar um pouco mais o método das subtrações sucessivas dentro do contexto de problemas. O que ficou evidente para nós é que os alunos estavam progredindo e escolhendo a estratégia das subtrações sucessivas e aos poucos abandonando a estratégia icônica. Compreendemos que o ensinado sobre o conteúdo de divisão, alguns assimilaram mais rapidamente que outros. Nós consideramos que cada aluno a seu tempo estava se apropriando do conhecimento acerca da divisão. Todos estavam num processo de aprendizagem embora em ritmos diferentes.

Observamos, em nossa pesquisa de campo, que comumente o professor tem algum conhecimento sobre estratégias de contagem dos alunos. Contudo, a maioria dos professores não compreende a influência dessas estratégias no pensamento dos alunos. Alguns professores não valorizam a modelagem mental ou modelagem com materiais manipuláveis que os alunos realizam nas tarefas matemáticas priorizando a formalização das operações matemáticas logo que iniciam o conteúdo de adição, subtração, multiplicação e divisão. Talvez, isso tenha origem na crença de que alguns professores têm de que para serem bons em matemática, os alunos precisam saber resolver contas isoladas. Por isso, é importante promover entre os profissionais da educação propostas de ação-reflexão a partir da prática de sala de aula, de modo a discutir as prioridades do processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, relacionados às operações aritméticas fundamentais.

Tal abordagem é fundamental para que o professor tenha consciência de que, primeiramente, os alunos precisam resolver diversas situações-problema antes de aprender o procedimento formal. Segundo Serrazina e Oliveira (2005, p. 58) “treinar procedimentos sem compreensão não ajuda a mobilização na resolução de problemas ou em outras situações”. Acrescentamos que nossos alunos precisam vivenciar situações que exijam deles um pensamento flexível na elaboração de diferentes caminhos de resolução e também, em outros momentos, automatizar certos cálculos e procedimentos.

Em nossa experiência profissional notamos que os alunos resolvem atividades matemáticas, recorrendo a estratégias próprias antes do ensino das técnicas de cálculo. Algumas vezes mostram indícios de que compreendem as ideias por detrás das operações. Outras vezes apenas efetuam o algoritmo dissociado de significados e não estabelecem nenhuma relação entre o algoritmo e a situação-problema. Eles carregam na bagagem de conhecimento deles, impressões de um saber processual adquirido em outros espaços-tempo. Por isso, concordamos com um dos estudiosos das teorias cognitivistas de aprendizagem (VYGOTSKY, 2001) de que aprender é um processo de construção dinâmico do conhecimento. O sujeito incorpora ao saber construído a priori, o conhecimento ensinado na escola que tenha significado para ele de modo que sua aprendizagem vai sendo constituída.

5.3- Reflexões – As aprendizagens da professora pesquisadora

Chegar ao final deste projeto foi para nós uma constatação de que o sabor da vitória é melhor quando exige envolvimento, dedicação e provoca reflexões profundas. Aprender a fazer pesquisa foi para a professora pesquisadora iniciante um grande desafio. A pesquisa implicou também em investigar a própria prática. Isso não foi tarefa fácil porque exigiu da professora pesquisadora iniciante identificar as próprias limitações e algumas concepções equivocadas enraizadas ao longo da experiência profissional de dar aulas de matemática.

É um caminho sem volta, felizmente, porque algumas aprendizagens foram conquistadas e incorporadas e antigas reformuladas. Tivemos que ter coragem de analisar alguns momentos e constatar que algumas intervenções realizadas por nós não foram positivas. Algumas situações exigiram que nós recorrêssemos a outras estratégias de abordagens mais eficientes. Foi preciso compreender que o professor é o planejador do plano de voo. Assim precisa dar liberdade de voo ao aluno para pensar, criar, reinventar e, finalmente, considerar as respostas desenvolvidas por ele.

Quando o professor respeita o aluno em suas decisões de escolhas de cálculo, escuta-o para entender seu raciocínio (LORENZATO, 2010), é favorecido um ambiente em que a autonomia é estimulada. O aluno sente que tem liberdade em decidir, compreende que é possível fazer experimentos mentais do jeito dele para distribuir. Assim, é necessário respeitar o tempo e o ritmo de cada um no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

5.4- Limitações e desdobramentos

Sabemos, pela nossa experiência, que a rotina de uma sala de aula é integralmente dinâmica. Não foi diferente no campo desta pesquisa e, por isso, nosso envolvimento com a turma e com os alunos foi importante para captar a rotina da aula da professora Suelen. Embora nosso estudo tenha sido sobre a divisão, sentimos que necessitávamos de um tempo maior para analisar as aprendizagens que ocorreram, a respeito das quatro operações fundamentais e das novas formas de aprender. Quando aplicamos as atividades diagnósticas e algumas atividades de ensino, tivemos que assumir a regência da sala. Sentimos que, por vezes, os papéis da professora pesquisadora e professora de sala de aula se misturavam e, por isso, compreendemos que nesse ambiente algumas coisas nos escaparam.

No caminhar de nossa pesquisa, aprendemos que o conteúdo de divisão precisa ser trabalhado desde o início do ano letivo, junto com a operação de adição, subtração e multiplicação. Não tivemos condições de propor esse trabalho à professora Suelen porque só chegamos na escola no segundo semestre do ano letivo. Nesse período, a professora Suelen já tinha elaborado seu planejamento anual de matemática e direcionado o trabalho com a divisão para os últimos meses do ano. Durante o período em que estivemos em campo com Suelen, percebemos que laços afetivos foram fortalecidos entre nós. Algumas reflexões, aprendizagens e relatos da prática pedagógica foram realizados enquanto estávamos juntas em sala de aula ou em planejamento ou por e-mails e telefonemas. Nos momentos de conversas com Suelen, falamos a respeito de nossas aprendizagens a respeito de divisão, matemática e de como ensinar e da importância de valorizar as estratégias próprias desenvolvidas pelos alunos, dos algoritmos de outras civilizações e nos encantávamos com isso.

Numa de nossas conversas, uma funcionária da escola que tinha a responsabilidade de limpar a sala após a aula, viu a demonstração do algoritmo por subtrações sucessivas e nos pediu que mostrássemos novamente. A funcionária parou o que estava fazendo, veio feliz até o quadro, comentando que nunca tinha visto fazer “conta” do jeito que estávamos efetuando. Disse também que a matemática ficava difícil quando “chegava nas contas” e que não podia fazer desenhos como respostas, eram somente números que poderiam aparecer. Nós também tivemos esses sentimentos por muito tempo, a respeito de matemática e sentimos que todos estávamos aprendendo, como professora pesquisadora iniciante e como regente de sala, a professora Suelen, a funcionária da escola e os alunos.

Os momentos vividos na escola ficarão em nossa memória constituindo a nossa história de vida. Suelen nos relatou que estava ansiosa para planejar suas atividades de matemática para o ano seguinte e que começaria, abordando as quatro operações integradas desde o início. Contou-nos também que, em casa, ficava exercitando as questões matemáticas propostas por nós em sala de aula e que, anteriormente, não conhecia. Falou, por exemplo, a respeito das estratégias egípcias de fazer os cálculos de multiplicação e divisão, a variedade de estratégias icônicas possíveis de resolução e, por fim, do algoritmo de divisão por subtrações sucessivas.

Alguns desdobramentos desta pesquisa se efetivaram em 2014. Tivemos a oportunidade de participar em formações do PNAIC; em formações nas escolas municipais da rede pública de Vitória, Cariacica e Viana. Acrescentamos também o planejamento e a realização de oficinas com os profissionais de educação da rede municipal do município de Viana. Pudemos perceber a necessidade que os profissionais de educação das séries iniciais sentem referente a discussões, reflexões, aprendizagens e oficinas que abordem o trabalho com a matemática e educação matemática nas salas de aulas com crianças.

Esperamos que este estudo desenvolvido numa sala de aula de matemática possa trazer contribuições teóricas e metodológicas na construção do conceito de dividir e na abordagem de estratégias variadas, envolvendo as duas ideias básicas de divisão. Enfatizamos que é possível planejar um ensino de divisão pautado a partir do conhecimento que os alunos têm acerca do tema, a fim de estimular que cada aluno elabore seus caminhos de solução antes de aprender, formalmente, o algoritmo. Sonhamos que os professores levem em consideração, as peculiaridades e o ritmo de cada aluno no processo pedagógico e acreditem que todos os alunos têm potencial em aprender matemática, cada um em seu ritmo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na educação básica.** Lisboa: ME/DEB, 1999.

ALMEIDA, M. de C. **Origens da matemática.** Curitiba: Ed. Champagnat, 1998.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Liber Livro Editora, 2005.

BENVENUTTI, L. C. **A operação divisão:** um estudo com alunos de 5ª série. 2008. 61f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina, Itajaí, 2008.

BOYER, B. C. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Ensino de primeira à quarta séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-letramento:** Programa de Formação Continuada de Professores dos Anos/Séries Iniciais do Ensino Fundamental – matemática. Matriz de referência. ed. rev. e ampl. Brasília: MEC, 2007.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de apoio à gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Quantificação, registro e agrupamentos. Brasília: MEC, SEB, 2014. 88 p.

CAMPOS, E. G. J de. **As dificuldades na aprendizagem da divisão:** análise da produção de erros de aluno do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores. 2008. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação) Centro de Educação da Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2008.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989 (1ª edição foi em 1958.).

CARRAHER, D. W. Relações entre razão, divisão e medida. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. W. (org.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998, p. 73-94.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** 10 ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CARVALHO, A.; GONÇALVES, H. Multiplicação e divisão: conceitos em construção. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DO 1º CICLO. VI. Portugal. **Anais,** 2003, p. 23-25.

CENTURIÓN, M. **É bom aprender:** matemática. Educação de jovens e adultos – EJA, vol.1. São Paulo: FTD, 2005.

CORREA, J.; SPINILLO, A. G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In: PAVANELLO, R. M. (org.). **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental:** a pesquisa e a sala de aula, v. 2. São Paulo: Biblioteca do educador matemático, Coleção SBEM, 2004, p. 103-127.

CUNHA, M. C. C da. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries.** 1997. 153f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, PUC: Perdizes/São Paulo

DAMÁSIO, A. O homem está evoluindo para conciliar a emoção e a razão. **Revista Eletrônica Veja**, São Paulo, Caderno de Ciência: neurociência. 2013. Entrevista concedida a Julia Carvalho. Site: http://veja.abril.com.br/noticia/ciencia/os-sentimentos-sao-fundamentais-para-a-sociedade-diz-antonio-damasio. (Acesso em 26/02/2014.)

DAVIS, C.; OLIVEIRA, Z. **Psicologia na educação.** 3.ed. São Paulo: Cortez, 2010.

DEWEY, J. **Como pensamos:** como se relaciona o pensamento reflexivo com o processo educativo, uma reexposição. Tradução de Haydée Camargo campos. 4.ed. São Paulo: Ed. Nacional, 1979.

ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics, In: ERNEST, P. (ed.). **Mathematics teaching**: the state of the art. London: Falmer Press, 1988. Disponível:<http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm>. Acesso em 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: SP, Editora da Unicamp, 2011, 848p.

FERREIRA, E. Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º ciclo. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 113-137.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional:** os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Trabalho publicado originalmente em espanhol em 2000.).

HOFFMAN, B. V. S. **O uso de diferentes formas de comunicação em aulas de matemática no ensino fundamental.** 2012. 290f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2012.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Ed. Artmed, 2006.

IMENES, L. M. **Presente matemática:** guia e recursos didáticos. São Paulo: Moderna, 2012.

JESUS, A. M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 91-111.

KAMII, C. **A criança e o número:** implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. Tradução de Regina A. de Assis. Campinas, SP: Papirus, 1984.

LA TAILLE, Y. de; OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. **Piaget, Vygotsky, Wallon**: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992.

LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem oral para outras formas de representação. In: Simpósio Desenvolvimento lógico-matemático: Compreendendo, representação e resolução de problemas e operações aritméticas. **XXIX Reunião Anual de Psicologia da Sociedade Brasileira de Psicologia.** Campinas: SP, v.7, n. 1, 23-36, 1999.

LIMA. R. R de. **Campo Multiplicativo:** estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió. 2012. 126f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

______. **Para aprender matemática.** 3.ed.rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

MALDANER, A. **Educação matemática:** fundamentos teóricos-práticos para professores dos anos iniciais. Porto Alegre: Mediação, 2011.

MANDARINO, M. C. F. **Números naturais:** conteúdo e forma. Rio de Janeiro. Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. **O ensino da matemática no primeiro grau.** São Paulo: Atual, 1986.

MOREIRA, D.; OLIVEIRA, I. **Iniciação à matemática no Jardim de Infância.** Lisboa: Universidade Aberta, 2003.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática.** Campinas, SP: Papirus, 2009.

MUNIZ, C. A. **Pedagogia:** educação e linguagem matemática. Ed. Pedead: Brasília. FUB/Unb, 2007.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio histórico, 1997.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A.V.; BORBA, M. de C. (org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 2. ed. rev. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

PAIS, L.C. **Ensinar e aprender matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

______. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 2.ed. 2.reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PARRA, C. **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan AcuñaLlorens. Porto Alegre: Artmed, 1996a.

______. Cálculo mental na escola na escola primária. In: PARRA, C.; Saiz, I (org). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 1996b. p. 186-235.

PASSOS, M. M.; PASSOS, A. M. **É bom aprender:** matemática. vol.1. Educação de jovens e adultos – EJA. São Paulo: Editora FTD, 2009.

PIRES, C. M. C. **Educação matemática:** conversas com professores dos anos iniciais. 1.ed. São Paulo: Zé-Zapt Editora, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. 2. reimp. Rio de Janeiro: Interciência, 1995 (O trabalho original foi publicado em 1945 em inglês com o título: How to solve it.).

PONTE, J. P. da; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da matemática do 1º** ciclo. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

SÁ, L. P. de. **A magia da matemática:** atividades investigativas, curiosidades e história da matemática. 3. ed. Ciência Moderna: RJ, 2010. 200p.

SANTOS, D. M. dos. **Estratégias de cálculo mental de alunos da 5ª série/6º ano do ensino fundamental.** 2014. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

SANTOS, V. M. P.; REZENDE, J. F. R. **Números:** linguagem universal. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/Instituto de Matemática, UFRJ, 1996.

SANTOS, V. M. P. dos. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática:** métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM,** nº 53, p. 43-74, Jul./Dez. 2008.

______. **Notas de aulas com a orientadora sobre Tópicos em linha de pesquisa I (educação matemática) e Estudos Independentes**. PPGE/UFES. 2012, 2013.

______. **Orientações para elaboração de texto final e para análise de dados**. PPGE/UFES. 2013, 2014.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: SCHLIEMANN, A. e CARRAHER, D. W. (org). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. Campinas, SP: Papirus, 1998. p. 95-119.

SERRAZINA, M. de L. M.; OLIVEIRA, I. O currículo de matemática do ensino básico sob o olhar da competência matemática. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 35-62.

______. Trajectória de aprendizagem e ensinar para a compreensão. Em GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). **O professor e o programa de matemática do ensino básico**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2010, p. 43-59.

SERRAZINA, M. de L. M. **A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico.** Portugal: Porto Editora, 2002.

______. Conhecimento matemático para ensinar: papel da planificação e da reflexão na formação de professores. **Revista Eletrônica de Educação.** São Carlos, SP: UFSCAR, v. 6, nº. 1, p. 266-283, mai. 2012a. Disponível: http://www.reveduc.ufscar.br.

______. O sentido do número no 1º ciclo: uma leitura de investigação. **Boletim GEPEM,** Seropédica: Rio de Janeiro/nº. 61 – Jul./Dez. 2012b/ 15-28.

SILVA, C. M. S.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em educação matemática? **Caderno de Pesquisa do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFES**, Vitória, v. 10, n. 19, p. 10-23, dez. 1999.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching,** vol. 77, 1976, p. 20-26.

SKWARCHUK, S. L. **Look who's counting!** The 123s of children's mathematical development during the early school years. Encyclopedia of Language and Literacy Development , 2008, p. 1-9. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network. http://www.literacyencyclopedia.ca/pdfs/topic.php?topId=243.

SMOLE, K . S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SPINILLO. A. G. Quantificação, registro e agrupamentos. In : BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de apoio à gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.** Brasília: MEC, SEB, 2014. p. 20-32.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Teoria e prática de matemática:** como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

USISKIN, Z. Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In: (KENNEY, M. J.; MORROW, L. J. (ed.). The teaching and learning of algorithms in school mathematics. **Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.** Reston, Virgínia: NCTM, 1998. pp. 7-20.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. Ed. Porto Alegre, Artmed, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizado por Michel Cole et al. Tradução de José Cipolla Neto; Luiz Silveira Menna Barreto; Solange Castro Afeche. 6.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998 (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1984).

______. **Pensamento e linguagem**. Tradução de Jefferson Luiz Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1993. (Publicado pela primeira vez no Brasil em 1987.).

______. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

WALLAUER, A. **Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª série de classes multisseriadas.** 2006. 205f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

ZUNINO, D. L. de. **A matemática na escola:** aqui e agora. Tradução de Juan Acuña Llorens. 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

APÊNDICE A

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado Diretor,

Em cumprimento à Norma 196/96, da resolução do Conselho Nacional de Ética, que regulamenta a realização de pesquisas envolvendo seres humanos, este documento vem solicitar seu consentimento para utilizar as informações coletadas para minha pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. A pesquisa tem por objetivo investigar e compreender as estratégias de resolução de problemas elaboradas por alunos defasados em idade-série. Os instrumentos para coletar informações nesta pesquisa consistem em: observações, conversas, diário de bordo, entrevistas e tarefas matemáticas. Esclarecemos que as informações obtidas serão resguardadas, os nomes receberão códigos, sendo a pesquisadora única conhecedora destes. Contamos com sua colaboração para que possamos compreender melhor este processo de avaliação em Matemática.

Vitória, ____ de_________________ de 2013.

Assinatura do diretor: ________________________________

Estamos à disposição para outros esclarecimentos. Agradecemos pela atenção.

Atenciosamente,

Alexsandra Lúcia Miranda Senna da Silva

Universidade Federal do Espírito Santo

Programa de Pós-Graduação em Educação

APÊNDICE B

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado aluno (a),

Eu, professora Alexsandra Miranda Senna da Silva, gostaria de convidá-lo (a) a participar de uma pesquisa em educação matemática. Para tanto gostaria de solicitar a autorização do seu responsável para viabilizar a sua participação como sujeito dessa pesquisa em educação que estarei iniciando com vocês. Em qualquer momento, você poderá desistir de participar desta investigação. Todas as informações que forem compartilhadas e analisadas irão permanecer em sigilo. Além disso, informo que todos os nomes e informações para identificarem o aluno (a) serão mantidos em sigilo. No relato final da investigação, nós utilizaremos um código para identificação dos alunos. Comprometemo-nos em garantir o retorno de tudo que for realizado com vocês. Desde já agradecemos a colaboração.

Local : ________________________________

Data: ___/___/___

Assinatura do responsável: ____________________________________

Alexsandra Lúcia Miranda Senna da Silva

Universidade Federal do Espírito Santo

Programa de Pós-Graduação em Educação

APÊNDICE C

CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezada Professora,

Em cumprimento à Norma 196/96 da resolução do Conselho Nacional de Ética em Pesquisa, que regulamenta a realização de pesquisas envolvendo seres humanos, este documento vem solicitar seu consentimento para utilizar as informações coletadas na sala de aula de seu/sua filho (a) para minha pesquisa de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. A pesquisa tem por objetivo investigar e compreender as estratégias de resolução de problemas elaboradas por alunos defasados em idade-série. Os instrumentos para coletar informações nesta pesquisa consistem em: observações, conversas, diário de bordo, entrevistas e tarefas matemáticas em aulas. Esclarecemos que as informações obtidas serão resguardadas, os nomes receberão códigos, sendo a pesquisadora única conhecedora destes. Contamos com sua colaboração para que possamos compreender melhor este processo de avaliação em Matemática. Agradecemos pela atenção.

Vitória, ____ de_________________ de 2013.

Assinatura do professor: ____________________________

Alexsandra Lúcia Miranda Senna da Silva

Universidade Federal do Espírito Santo

Programa de Pós-Graduação em Educação

APÊNDICE D

Quadro 8: Atividades elaboradas e aplicadas pela professora Suelen

DATA		ATIVIDADE	OBJETIVO	METODOLOGIA
25/06/2013		Resolução de problemas envolvendo sistema monetário e apresentação da pesquisa aos alunos.	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema e; Saber efetuar os cálculos.	Foi explorada no quadro uma lista de problemas envolvendo as operações de adição, subtração e multiplicação. Aula procedeu com diálogos entre professora e alunos tendo o quadro como suporte para explicações.
28/06		-Correção dos problemas da aula anterior; -Elaboração de problemas a partir de contas isoladas (duas de adição, uma de subtração e duas de multiplicação).	Verificar se houve compreensão na resolução de problemas; Desenvolver a capacidade de elaboração de situações-problema envolvendo adição, subtração e multiplicação.	Aula expositiva e dialogada. Junto com a professora circulei pela sala para ajudar os alunos com dúvidas e dificuldades de compreensão das tarefas.
02/07		Resolução de problemas	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema e; Saber efetuar os cálculos.	A professora fez a leitura no quadro e ia fazendo alguns questionamentos referentes aos dados e a questão do problema. Depois, marcou um tempo para que os alunos resolvessem a tarefa em dupla.
05, 08, 11 e 12/07		Conteúdo de Fração	Representar frações como parte de um todo e usar a ideia de fração ou divisão na resolução de problemas e por meio do jogo coletivo (framinó) Comparar frações.	Falou sobre a definição de fração. Alguns materiais foram explorados pela professora (bolo, biscoito, frutas e barrinhas de cereais). Fazia a representação simbólica e icônica da fração no quadro. Lista de problemas com frações.
Recesso escolar				

26/07		-Correção de trabalho individual envolvendo fração -Revisão e prosseguimento do conteúdo de fração	Aplicar o conhecimento no cotidiano, para que os alunos se deem conta da importância na para além da escola. Interagir de forma contextualizada com uso de material concreto, viabilizando a fixação e a interação com os alunos.	Foi proposto aos alunos que confeccionassem cartazes representando as frações. Os alunos recebiam uma figura fracionada com a fração simbolicamente definida. Então deveriam pintar a fração destacada pela professora. Lista de situações envolvendo fração: os alunos deveriam representar graficamente a fração.
09/08		Avaliação contendo problemas envolvendo sistema monetário e fração.	Verificação da aprendizagem	Os alunos tem o tempo de duas aulas- 1h40min para resolverem as tarefas propostas na avaliação. Eles fazem a leitura silenciosa e em determinado momento a professora faz a leitura oral com os alunos acompanhando.
10/08		Atividade de arme e efetue envolvendo adição, subtração e multiplicação.	Automatizar procedimentos de resolução das operações.	Foram utilizados o material dourado, cusinaire e material de contagem com os alunos divididos em grupos.
16/08		Lista de problemas envolvendo sistema monetário	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema e; - Saber efetuar os cálculos.	Aula dialogada e expositiva com problemas relacionados às receitas culinárias trabalhas na disciplina de língua portuguesa.
19/08		Atividade de cálculo mental envolvendo as operações de adição, subtração e multiplicação. Jogo do "dez não pode ou nunca dez" adaptado com outras bases. Valor relativo e valor absoluto com material dourado.	Desenvolver o raciocínio lógico do aluno; Trabalhar com outras bases do sistema de numeração além da base dez.	Aula dialogada. Por ser a primeira vez que os alunos estavam aplicando o conhecimento do sistema de numeração no jogo, foi proposto que os alunos não jogassem em grupos maiores mas em duplas para

				que a compreensão com as trocas fosse melhor mediada pelas professoras.
23/08		Resolução de problemas	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema. Efetuar os cálculos, fazer contagem. Efetuar trocas de cédulas envolvendo o sistema monetário.	Lista de situações-problema em que o aluno deveria somar as notas do personagem, representar as cédulas e escrever por extenso. A atividade foi orientada com questionamentos feitos pela professora. Os alunos seguiam o passo a passo da resolução mediado pela professora.
26/08		Atividades com encartes de propagandas envolvendo discussões sobre relações de compra e venda, arredondamentos, comprar à vista ou parcelado, produtos perecíveis, compras no cartão, dívidas, descontos, varejo, atacado. Resolução de problemas.	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema. Efetuar os cálculos, fazer contagem. Interpretar um texto de propaganda. Ampliar o vocabulário matemático.	Aula expositiva e dialogada. Os alunos deveriam descobrir os produtos mais caros e baratos; resolver problemas com adição, subtração, multiplicação e fração. Foi proposto também preencher um cheque simulando uma situação de compra e venda. Era preciso que os alunos representassem os valores com cédulas. A professora e eu circulávamos pela sala para ajudar os alunos.
27/08		Prosseguimento da aula anterior com o texto do encarte publicitário	Selecionar e interpretar os dados relevantes do problema. Efetuar os cálculos, fazer contagem. Interpretar um texto de propaganda. Ampliar o vocabulário matemático	Verificação dos problemas com correção no quadro realizada por alguns alunos.

APÊNDICE E

Primeira Atividade Diagnóstica

Problema 1:

Tenho 15 balas e vou entregar 3 balas para cada criança. Quantas crianças participarão da distribuição?

Problema 2:

Tenho R$ 18,00 reais e quero comprar algumas caixas de bombom. Cada caixa custa R$ 6 reais. Quantas caixas eu posso comprar com essa quantia?

Problema 3:

Cláudio comprou 12 carrinhos e queria guardar 3 carrinhos em cada caixa. Quantas caixas ele vai precisar para guardar os carrinhos?

APÊNDICE F

Segunda atividade diagnóstica

Problema 1:

Tenho 15 balas e quero dividir igualmente entre 5 crianças? Quantas balas cada criança receberá?

Problema 2:

Paguei R$ 18,00 reais por seis caixas de suco da mesma marca e do mesmo sabor. Qual o preço de uma caixa?

Problema 3:

Lúcio comprou 12 carrinhos e tinha três caixinhas. Ele queria guardar a mesma quantidade de carrinhos em todas as caixas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixa?

APÊNDICE G

Terceira atividade diagnóstica – Elaboração de problema com a ideia de medida.

Invente um problema de divisão semelhante à distribuição do problema 1. Você pode usar os mesmos dados numéricos, mas deve criar uma situação diferente.

APÊNDICE H

Quarta atividade diagnóstica – Elaboração de problema com a ideia de distribuir em partes iguais.

Invente um problema de divisão com os mesmos dados numéricos do problema 1 criando uma situação diferente.

APÊNDICE I

Terceira atividade de ensino

Crie duas contas de dividir por 2 e por 3 e tente resolver pelo método das subtrações sucessivas.

APÊNDICE J

Quarta atividade de ensino

Resolva as três operações de dividir pelo método das subtrações sucessivas:

a) 173 ÷ 3

b) 124 ÷ 2

c)243 ÷ 3

APÊNDICE K

ROTEIRO DE ENTREVISTA

Entrevista realizada no primeiro horário do dia 06 de setembro de 2013 no planejamento da professora.

Prezada Professora Esta entrevista tem o intuito de obter informações junto aos professores que ensinam matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, a respeito de suas concepções e procedimentos de ensino da divisão. A investigação será desenvolvida pela mestranda Alexsandra Lúcia Miranda L. Senna da Silva, sob a orientação da Professora Doutora Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner, Professora Orientadora vinculada à linha de pesquisa Educação e Linguagens: linguagem matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. Espera-se que esta pesquisa possa fornecer informações suficientes para a compreensão das estratégias de ensino de divisão utilizadas pelos alunos do ensino fundamental. Para este fim, solicitamos alguns minutos de seu precioso tempo. Os dados serão tratados com impessoalidade (anonimato), bem como serão utilizados apenas para fim de investigação.

INFORMAÇÕES GERAIS DA PROFESSORA:

Idade: 41 anos Sexo: Feminino

Escolaridade: Graduação em Ed Artística com habilitação em Artes Plásticas.

Tempo de serviço: 22 anos

INFORMAÇÕES ACERCA DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA DIVISÃO:

1) Durante seu curso de graduação foram ensinadas e exploradas as estratégias utilizadas na operação de divisão?

Foi discutido no ensino médio, antigo curso de Magistério e na época 2º grau. Na minha graduação não ocorreu, pois a área que escolhi não oportunizou devido as especificidades próprias do curso de Artes. Ainda no Magistério, nas saudosas aulas de Didática da Matemática, o discurso era muito voltado para a confecção de material concreto e principalmente do QVL (quadro de valor e lugar), recurso que utilizo nos dias de hoje e não pretendo abandonar tal sua condição de promover o raciocínio e compreensão.

2) Você tem conhecimento ou já ouviu falar de estratégias na resolução de problemas e operações de divisão utilizadas por outros povos em diferentes períodos da história da humanidade? Comente.

Sei que utilizavam gravetos. Nunca trabalhei com os alunos a forma como os povos antigos realizavam seus cálculos; foi uma falha.

3) Você se sente preparada para desempenhar seu papel como professora mediando a aquisição de outras estratégias de divisão?

Confesso que não tive bons professores na área da Matemática e que existia um hiato entre nós. Mas o amor pelo ofício sempre fala mais alto e procuro buscar e/ou adaptar estratégias que deem condições do meu aluno aprender, e assim, utilizar os conceitos matemáticos na resolução de problemas no cotidiano dele. Quanto ao preparo acredito que no momento sim, porque o aprendizado não é finito e a necessidade de se atualizar, inovar e tornar as aulas mais produtivas deve ser inerente. Tenho muito bem definido que não possuo o "aluno ideal", tenho sim o "aluno real", e a partir dessa convicção sei que devo preparar minhas aulas sempre atenta ao meu público alvo.

4) A partir de que série/ano você acredita ser importante iniciar o ensino da operação de divisão?

O interessante na vida e na educação é capacidade de nos mostrar que "alguns conceitos" não são totalmente absolutos e que podem tornar-se relativos. Hoje, com a experiência que possuo, observo que é possível iniciar o ensino das quatro operações independentemente de série/ano pelo simples fato que toda bagagem que o indivíduo traz já oferece condições para tal aprendizagem. Basta, no meu ponto de vista, adaptar e oportunizar atividades de acordo com a faixa etária e maturidade das crianças envolvidas.

5) Como você trabalha para que seus alunos se apropriem do conhecimento para resolverem a operação de divisão?

Modifico os enunciados das atividades mantendo o mesmo teor, pois tenho aversão aos enunciados tradicionais, envolvo-os nas situações problemas tornando-os personagens, dramatizo os problemas juntamente com os alunos, utilizo encartes de propaganda fazendo toda a inferência possível antes do registro dos cálculos, utilizo material concreto (tampinhas de garrafa pet e palitos de picolé), faço uso do Quadro Valor de Lugar, realizo receitas de culinária; possuo trena, fita métrica e balança para realização de atividades que necessitam de tais ferramentas, planejo e executo aulas com auxílio do laboratório de informática (através de sites educativos), confecciono folhas de cheque para preenchimento e solução de problemas, possibilito a realização de charadas matemática com um almanaque específico para as "horas vagas", realizo atividades onde o aluno desenhará as cédulas necessárias que representam a quantia em destaque, possibilito "aulas de mágica" onde o foco é a lógica e o cálculo. Aceito sugestões.

6) Você utiliza livros didáticos que apresentam propostas para o ensino da operação de divisão?

Utilizo vários livros didáticos, revistas e coleções. Uso o Livro "Fique ligado em Matemática", Patrícia Ester/ Ana Paula Anunciação (4º ano); a revista Recreio; a revista Projetos Escolares Ensino Fundamental (1º ao 5º ano); a coleção "O dia a dia do professor" (3ª e 4ª série) da editora Fapi e o livro didático da turma "Projeto Buriti – Matemática – 4º ano".

ANEXO 1

Primeira atividade de ensino- algoritmo da divisão por subtrações sucessivas – Adaptado do livro Pró-Letramento, 2007, p. 21.

Divisão 24/3

Possíveis questionamentos:

1. Quantas vezes é possível tirar grupos de três elementos dentro do vinte e quatro?
2. Como descobrimos quantos objetos retiramos, se nós retiramos uma vez 1 conjunto? Quantos objetos tiramos?
3. O que devemos fazer para saber quantos objetos restaram?
4. Podemos continuar tirando 3 de 24, agora que temos 21 objetos?
5. Agora que não podemos tirar nenhum grupo de 3, quantas vezes tiramos um conjunto de três de dento do 24? Que operação nós devemos fazer para calcular o número total de vezes em que tiramos grupos de 3, de 24?

Divisão 92/4

1. Quantas vezes é possível tirar grupos de quatro elementos dentro do noventa e dois?

Ir registrando cada uma das vezes que retirarem um conjunto de 3 elementos, fazendo perguntas que relacionem a ação sobre os objetos e o registro.

2. Como descobrimos quantos objetos retiramos, se nós retiramos uma vez 1 conjunto?
3. Quantos objetos tiramos?
4. O que devemos fazer para saber quantos objetos restaram?
5. Podemos continuar tirando 4 de 92, agora que temos 88 objetos?
6. Agora que não podemos tirar nenhum grupo de 4, quantas vezes tiramos um conjunto de quatro de dento do 92? Que operação nós devemos fazer para calcular o número total de vezes em que tiramos grupos de 4, de 92?

ANEXO 2

Segunda atividade de ensino

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1) Nicolas tem 12 carrinhos Hot Wheels e vai dividir igualmente entre três colegas. Quantos carrinhos cada colega ganhará?

2) Mamãe fará o bolo de banana para receber algumas visitas lá em casa. Ela já separou 16 ovos e cada receita precisa de 4 ovos. Quantas receitas a mamãe fará?

APÊNDICE L

Quadro 9: Resumo das atividades trabalhadas no experimento de ensino em 2013

Data	Atividades	Objetivos da atividade	Objetivos da pesquisa	Procedimentos metodológicos Instrumentos usados para coleta de dados	Formas de organização das informações
10/09/13 **1 aula**	Atividade diagnóstica de divisão com os alunos em círculo.	-Explorar situações com divisão envolvendo as duas ideias básicas. -Resolver cálculos sem uso de lápis e papel. -Identificar situações de divisão exata com resto igual a zero e divisão não-exata com resto maior que zero.	-Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino.	Os alunos dispostos em pé formaram um círculo. Fizeram a contagem de quantas pessoas faziam parte do círculo. Estavam 22 alunos presentes naquele momento. Ora faziam distribuição em partes iguais, ora faziam divisão por medida mediante a solicitação da professora pesquisadora. Após a divisão, pausamos para discutir as duas ideias de divisão.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora.
13/09 **2 aulas**	Atividade diagnóstica com problemas utilizando material concreto e dinheiro chinês.	-Resolver problemas de divisão com material concreto e dinheiro chinês e registrar os resultados encontrados. -Saber efetuar trocas entre as cédulas do dinheiro chinês quando necessário para efetuar o cálculo, exemplo, uma cédula de 100 por 10 cédulas de 10.	-Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino.	Na primeira aula distribuímos materiais de contagem em saquinhos separados e dentro de cada saquinho havia uma ficha com duas tarefas de divisão escritas para serem resolvidas usando os objetos. Os alunos resolveram as duas situações-problema concretamente e registraram por escrito o raciocínio. Na segunda aula distribuímos cédulas de dinheiro chinês de 100, 10 e 1 correspondente ao sistema de numeração decimal. Sentaram em duplas e a professora pesquisadora foi o caixa que teve a função de distribuição e troca de cédulas quando era solicitada pela dupla para resolver uma determinada tarefa. A professora titular formou uma dupla com um aluno. Após concluírem a divisão concretamente, os alunos fizeram o registro usando lápis e papel.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta aula. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos.
16/09 **2 aulas**	História dos números e atividade diagnóstica de resolução de	-Conhecer a evolução histórica dos símbolos utilizados por diferentes povos da antiguidade para representar quantidade.	-Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles	Na primeira aula. A história dos símbolos numéricos foi apresentada para relacionar com as estratégias icônicas que estavam sendo elaboradas por eles para representarem os procedimentos e resultados das situações-	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora.

	problemas envolvendo problemas de repartir em partes iguais.	-Resolver situações-problema.	para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino.	problema de divisão e que essas estratégias também passariam por uma transformação e eles aprenderiam outras formas de representar o resultado de uma divisão. Na segunda aula foram entregues três problemas de divisão envolvendo a ideia de repartir em partes iguais para que os alunos livremente resolvessem sem interferência.	-Registro escrito das atividades pelos alunos. - Conversa informal com os alunos na biblioteca.
17/09 **1 aula**	Atividade diagnóstica de resolução de problemas de divisão envolvendo a ideia de medida.	-Desenvolver cálculos fazendo agrupamentos. -Identificar a operação de subtração implícita na ideia de divisão de medida. -Resolver situações-problema.	- Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino.	Foram entregues três problemas de divisão envolvendo a ideia de medida para que os alunos livremente resolvessem sem interferência das professoras.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. -Registro escrito das atividades pelos alunos. - Conversa informal com os alunos na biblioteca.
01/10 **1 aula**	Atividade diagnóstica de elaboração de problemas de distribuição em partes iguais; Atividade de ensino envolvendo as duas ideias básicas de divisão com os alunos em círculo.	-Utilizar o pensamento lógico e a criatividade na elaboração de problemas e selecionar procedimentos para efetuar o cálculo, verificando sua adequação.	-Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino. - Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram a respeito das duas ideias de divisão – a ideia de repartir em partes iguais e de medida, e as estratégias elaboradas pelos alunos e/ou aprendidas com os outros	Na primeira aula foi proposto que os alunos elaborassem três problemas de divisão envolvendo distribuição em partes iguais livremente e sem a interferência da professora pesquisadora e da professora titular. Na segunda aula foi proposta novamente a atividade com os alunos em círculo porque percebemos que alguns alunos não haviam compreendido a proposta da atividade. Contudo, desta vez, a atividade foi orientada pela professora pesquisadora e realizada com menos alunos. Ao invés de envolver todos os alunos, apenas treze alunos foram chamados aleatoriamente à frente da turma.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos.

			colegas e professoras após um experimento de ensino.		
04/10 **1 aula**	Atividade diagnóstica de elaboração de problemas envolvendo a ideia de medida por quotas.	-Formular e resolver uma situação-problema de divisão levando em conta as etapas de resolução: compreensão do problema, elaboração de plano e estratégia para sua solução, execução dos plano, verificação da validade das estratégias e dos resultados e resposta por extenso.	-Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação antes de um experimento de ensino.	Foi proposto que os alunos elaborassem três problemas de divisão envolvendo a ideia de medida por quotas sem a interferência da professora pesquisadora.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos.
07/10 **2 aulas**	1ª Atividade de ensino explorando estratégias com os problemas das atividades diagnósticas estabelecendo diferenças entre as duas ideias. Atividade de ensino efetuando duas operações pelo método das subtrações sucessivas.	- Compreender as diferentes maneiras de resolver situações de divisão com a ideia de medida e de partes iguais. - Identificar, compreender e analisar outras estratégias para resolver situações-problema de divisão envolvendo a ideia de medida e de partes iguais.	-Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram a respeito das duas ideias de divisão – a ideia de repartir em partes iguais e de medida, e as estratégias elaboradas pelos alunos e/ou aprendidas com os outros colegas e professoras após um experimento de ensino.	Na primeira aula desenvolvemos caminhos alternativos para efetuar as situações-problema envolvendo as duas ideias de divisão. Na segunda aula ensinamos efetuar duas contas pelo algoritmo do método das subtrações sucessivas. Foram apresentadas no quadro as contas 24÷3 e 92÷4. Sob orientação, os alunos foram respondendo oralmente os questionamentos feitos pela professora pesquisadora para resolverem as contas utilizando o algoritmo por subtrações sucessivas.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos. - Entrevista individual com os alunos na biblioteca.
04/11	2ª atividade de ensino:	-Resolver com estratégias variadas as situações-	Identificar, compreender e analisar as aprendizagens	Aplicação da avaliação no tempo de duas aulas.	

2 aulas	Avaliação de matemática planejada pela professora titular.	problema envolvendo as duas ideias de divisão.	que ocorreram a respeito das duas ideias de divisão – a ideia de repartir em partes iguais e de medida, e as estratégias elaboradas pelos alunos e/ou aprendidas com os outros colegas e professoras após um experimento de ensino.		
11/11 **1 aula**	3ª Atividade de ensino: algoritmo pelo método das subtrações sucessivas.	- Desenvolver o algoritmo por subtrações sucessivas para efetuar quatro contas.	-Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram no procedimento do método das subtrações sucessivas.	Aula dialogada apresentando caminhos alternativos na resolução de problemas de divisão. Os alunos deveriam criar quatro contas de divisão: duas por 2 e duas por 3.	
25/11 **2 aulas**	Atividades de ensino: algoritmo por subtrações sucessivas.	-Explorar as relações entre a operação de subtração e a operação de divisão, estimativa e a razoabilidade do resultado. -Ampliar os procedimentos de cálculo possibilitando que o aluno se aproprie de estratégias mais elaboradas para resolver situações de divisão. -Automatizar o algoritmo por subtrações sucessivas e aprender a fazer estimativas.	-Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram na utilização do método das subtrações sucessivas. - Identificar, compreender e analisar as aprendizagens e ideias dos alunos a respeito de tarefas de divisão após o ensino formal do algoritmo por subtrações sucessivas.	Foi proposta uma atividade de arme e efetue com as seguintes divisões: 173 ÷ 3; 124 ÷ 2; 243 ÷ 3para que os alunos tentassem resolvê-las utilizando o algoritmo por subtrações sucessivas.	- Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos. - Registro fotográfico dos alunos no quadro resolvendo os algoritmos.
29/11 **2 aulas**	Atividade de ensino: discussão sobre as	-Utilizar o algoritmo de divisão por subtrações sucessivas.	-Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram a respeito das	Aula dialogada com alguns alunos no quadro para apresentarem as diferentes maneiras que resolveram a mesma conta utilizando o algoritmo por subtrações sucessivas.	Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa.

	estratégias utilizadas na atividade de dever de casa. <u>Atividades de ensino</u>: caça-resultado-cálculo mental.	-Estabelecer relações entre a multiplicação e a divisão como operação inversa.	duas ideias de divisão – a ideia de repartir em partes iguais e de medida, e as estratégias elaboradas pelos alunos e/ou aprendidas com os outros colegas e professoras após um experimento de ensino. - Identificar, compreender e analisar as ideias de divisão dos alunos e quais estratégias são desenvolvidas por eles para resolver situações que envolvem essa operação.	-Foi aplicada uma atividade de Caça-resultados em que os alunos teriam que descobrir numa cartela, divisões exatas em três quadrinhos seguidos na horizontal. Em seguida, completaram as sentenças das divisões que encontraram, por exemplo, 24÷6=4 e 24÷4=6.	Registros feitos no diário de campo da pesquisadora. - Registro escrito das atividades pelos alunos. - Registro fotográfico das atividades dos alunos.
02/12 **2 aulas**	<u>Atividades de ensino</u>: correção da atividade de caça-resultados e construção da tabuada de multiplicar/dividir.	-Estabelecer relações entre a multiplicação e a divisão como operação inversa.	-Identificar, compreender e analisar as aprendizagens que ocorreram a respeito das duas ideias de divisão – a ideia de repartir em partes iguais e de medida, e as estratégias elaboradas pelos alunos e/ou aprendidas com os outros colegas e professoras após um experimento de ensino.	<u>Na primeira aula</u> fizemos a correção do caça-resultados estabelecendo as relações da operação inversa. <u>Na segunda aula</u> foi realizada uma atividade de preenchimento de uma cartela construindo a tabuada de multiplicar/dividir. Todo o preenchimento foi orientado pela professora pesquisadora e algumas relações foram direcionadas pela professora pesquisadora: sequência numérica, contagem com agrupamentos, números pares e ímpares, simetria, múltiplos. Posteriormente, a professora pesquisadora orientou a leitura da cartela, identificando os fatos da multiplicação e da divisão.	Registros transcritos da gravação em áudio desta tarefa. - Registros feitos no diário de campo da pesquisadora.